

## Определение условия равнопрочности упругих элементов в упруго-компенсирующей лепестковой муфте

# 09, сентябрь 2014

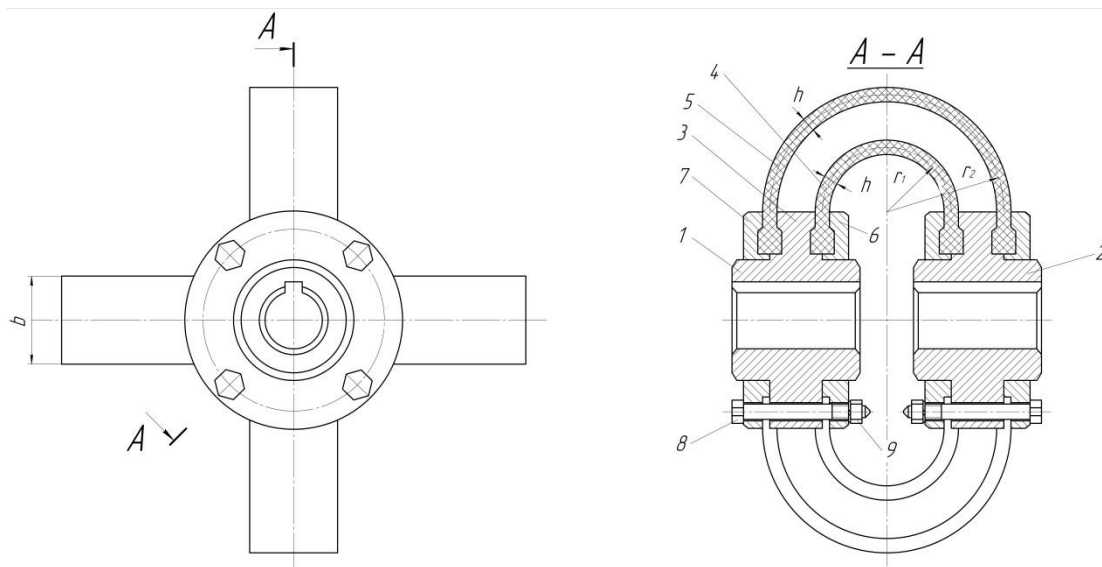
Богачев В. Н., Аникина В. С.

УДК: 621.825

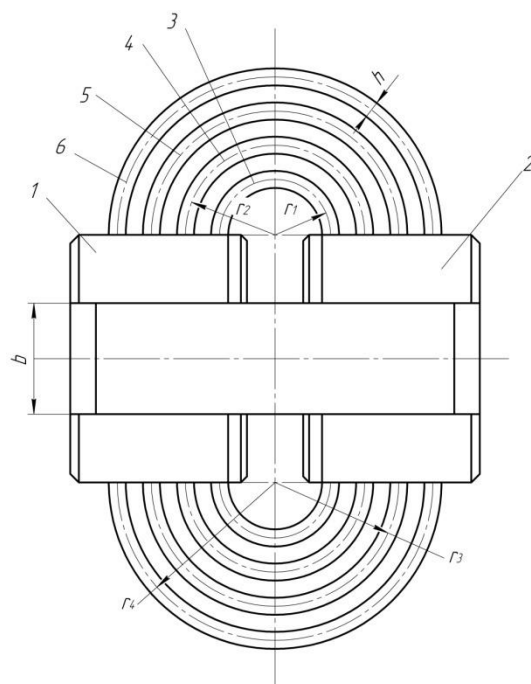
Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[vinsina@rambler.ru](mailto:vinsina@rambler.ru)

В машиностроении нередко требуется соединять валы машин и механизмов в условиях повышенных взаимных смещений валов и наличия динамических нагрузок. Для работы в таких условиях применяют упруго-компенсирующие муфты, среди которых наибольшей компенсирующей способностью обладают муфты с U-образными упругими элементами (лепестками) [1]. Обладая повышенной компенсирующей способностью эти муфты имеют невысокую нагрузочную способность. Для повышения нагрузочной способности лепестковых муфт применяют комплекты упругих элементов, состоящие из нескольких концентричных лепестков, например двух (рис. 1) или четырёх (рис. 2).



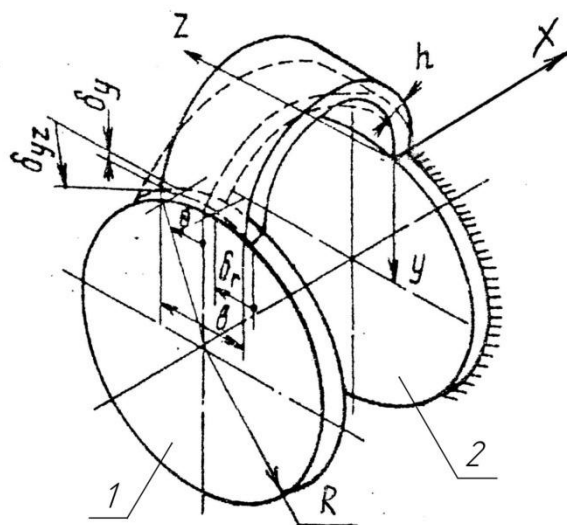
**Рис. 1.** Упруго-компенсирующая муфта с двумя U-образными упругими элементами (лепестками) в комплекте: 1, 2 – полумуфты; 3 – фланец полумуфты; 4 – лепесток №1; 5 – лепесток №2; 6, 7 – нажимные кольца; 8 – винт; 9 – гайка.



**Рис. 2.** Упруго-компенсирующая муфта с четырьмя U-образными упругими элементами (лепестками) в комплекте: 1,2 – полумуфты; 3 – лепесток №1; 4 – лепесток №2; 5 – лепесток №3; 6 – лепесток №4.

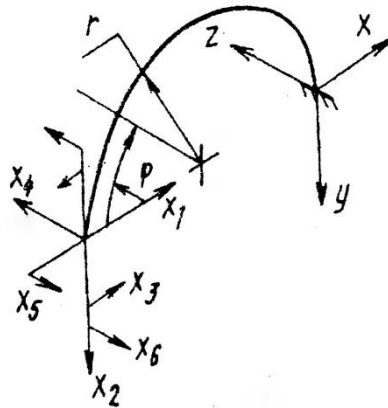
При взаимных смещениях полумуфт деформации концентричных лепестков, имеющих неодинаковые радиусы  $r$  и, следовательно, возникающие в них напряжения, неодинаковы, что приводит к неодинаковому сроку службы лепестков из одного комплекта. В статье рассмотрен один из способов выравнивания прочности упругих лепестков в комплекте.

При вращении ведущей полумуфты, например 1, вращающий момент через упругие элементы 4 и 5 (рис. 1) или 3...6 (рис. 2) передается на ведомую полумуфту 2. При этом упругие элементы деформируются, ведущая полумуфта 1 поворачивается относительно ведомой полумуфты 2 на угол  $\theta$  закручивания муфты, а закрепленные на ней концы упругих элементов получают перемещения (рис. 3).



**Рис. 3.** Схема перемещений конца упругого элемента, закреплённого на ведущей полумуфте.

Статическую неопределимость раскрываем методом сил для случая перемещения опор. Упругий элемент освобождаем от закрепления на конце, получившем перемещение; действие заделки заменяем неизвестными силами и моментами (рис. 4).



**Рис. 4.** Силы и моменты, действующие на подвижный конец упругого элемента, освобождённого от закрепления.

Выполнив расчёты, найдём силовые факторы  $X_1 \dots X_6$ , из которых  $X_1 = 0$ . Рассмотрим действие на упругий элемент момента  $X_6$ .

$$X_6 = R \cdot \sin \theta \frac{4}{\pi \cdot r^2 \left[ \frac{\pi}{EJ_{yz}} + \frac{1}{GJ_k} \left( \pi - \frac{\pi}{8} \right) \right]} + \theta \frac{2}{r \left[ \frac{\pi}{EJ_{yz}} + \frac{1}{GJ_k} \left( \pi - \frac{\pi}{8} \right) \right]}, \quad (1)$$

где  $R$  – радиус полумуфты;

$\theta$  – угол закручивания муфты;

$r$  – радиус кривизны оси упругого элемента;

$E$  и  $G$  – модули упругости материала упругого элемента при растяжении и сдвиге;

$J_{yz} = hb^3 / 12$ ;

$h$  и  $b$  – толщина и ширина поперечного сечения упругого элемента (см. рис. 1);

$J_k = \rho h^3 b$ ;

$\beta$  – коэффициент, зависящий от отношения  $b/h$ .

От действия момента  $X_6$  в поперечном сечении упругого элемента с угловой координатой  $\varphi$  возникают изгибающий момент

$$M_{H6} = X_6 \cos \varphi \quad (2)$$

и крутящий момент

$$M_{K6} = X_6 \sin \varphi \quad (3)$$

Напряжения, возникающие в упругом элементе от действия момента  $M_{H6}$

$$\sigma_6 = \frac{M_{H6}}{W_{yz}}, \quad (4)$$

$$\text{где } W_{yz} = hb^2/6. \quad (5)$$

Для углов закручивания  $\theta \leq 20^\circ$

$$\sin \theta \approx \theta. \quad (6)$$

В выражении (1) исключаем модуль упругости  $G$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad (7)$$

где  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Рассмотри, например, резиновые упругие элементы. Для резины  $\mu = 0,5$  и соотношение (7) примет вид

$$G = \frac{E}{3}. \quad (8)$$

Подставляем (2) и (5) в (4), принимая во внимание (1), (6) и (8). После преобразований получим

$$\sigma_6 = \frac{E \cdot \theta \cdot \cos \varphi}{rb \left( \frac{4\pi}{b^2} + \frac{2,748}{\beta h^2} \right)} \left( 2,546 \frac{R}{r} + 4 \right)$$

Муфта обладает наибольшей нагрузочной способностью, когда все упругие элементы равнопрочны, т.е. при закручивании муфты на угол  $\theta$  должно выполняться условие

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_i. \quad (9)$$

где  $i$  – номер упругого элемента в комплекте.

Для упругого элемента с радиусом  $r_1$

$$\sigma_{61} = \frac{E \cdot \theta \cdot \cos \varphi}{r_1 b_1 \left( \frac{4\pi}{b_1^2} + \frac{2,748}{\beta_1 h_1^2} \right)} \left( 2,546 \frac{R}{r_1} + 4 \right). \quad (10)$$

Для упругого элемента с радиусом  $r_2$

$$\sigma_{62} = \frac{E \cdot \theta \cdot \cos \varphi}{r_2 b_2 \left( \frac{4\pi}{b_2^2} + \frac{2,748}{\beta_2 h_2^2} \right)} \left( 2,546 \frac{R}{r_2} + 4 \right). \quad (11)$$

Ширина всех упругих элементов в комплекте одинакова (см. рис. 1), т.е.

$$b_1 = b_2 = \dots = b_i. \quad (12)$$

Из технологических соображений целесообразно выполнять одинаковой и толщину всех упругих элементов

$$h_1 = h_2 = \dots = h_i. \quad (13)$$

При выполнении условий (12) и (13)

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_i. \quad (14)$$

Подставляя (10) и (11) в (9) и принимая во внимание (12), (13) и (14), получим

$$\frac{E_1}{r_1^2}(0,636R+r_1)=\frac{E_2}{r_2^2}(0,636R+r_2). \quad (15)$$

Аналогично

$$\frac{E_{i-1}}{r_{i-1}^2}(0,636R+r_{i-1})=\frac{E_i}{r_i^2}(0,636R+r_i). \quad (16)$$

Здесь  $i$  – порядковый номер упругого элемента в комплекте (см. рис. 2).

На основании (15) и (16) можем записать

$$\frac{E_1}{r_1^2}(0,636R+r_1)=\frac{E_2}{r_2^2}(0,636R+r_2)=\dots=\frac{E_i}{r_i^2}(0,636R+r_i)$$

или

$$\frac{E_1}{r_1^2}=\frac{E_2}{r_2^2}\cdot\frac{0,636R+r_2}{0,636R+r_1}=\dots=\frac{E_i}{r_i^2}\cdot\frac{0,636R+r_i}{0,636R+r_1} \quad (17)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} M_{(6)_2} &= \frac{0,636R+r_2}{0,636R+r_1}, \\ M_{(6)_3} &= \frac{0,636R+r_3}{0,636R+r_1}, \\ &\dots\dots\dots \\ M_{(6)_i} &= \frac{0,636R+r_i}{0,636R+r_1}, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Подставим (18) в (17). Получим

$$\frac{E_1}{r_1^2}=\frac{E_2}{r_2^2}\cdot M_{(6)_2}=\dots=\frac{E_i}{r_i^2}\cdot M_{(6)_i}. \quad (19)$$

В используемых на практике муфтах  $R=(1\dots4)r_{\max}$ , где  $r_{\max}=r_i$ . Число упругих элементов  $n$  в комплекте неограниченно, хотя из конструктивных соображений нецелесообразно принимать  $n > 4$ . Средние значения сомножителей  $M_{(6)_{\text{ср}}}$ , равные полусумме  $M_{(6)_i}$  при  $R=r_{\max}$  и  $R=4r_{\max}$  достаточно хорошо описывает функция

$$M_{(6)_{\text{ср}}} = 1,21^{\frac{2}{n}+i-2}, \quad (20)$$

что позволяет переписать соотношение (19) в виде

$$\frac{E_1}{r_1^2}=\frac{E_2}{r_2^2}1,21^{\frac{2}{n}+i-2} \quad (21)$$

Такой же результат получен при действии на упругий элемент крутящего момента  $M_{\kappa 6}$ .

Для удобства обозначим буквой  $p$  показатель степени в формуле (21), т.е.

$$p=\frac{2}{n}+i-2. \quad (22)$$

Рассмотрим действие на упругий элемент момента  $X_5$

$$X_5 = R \cdot \sin \theta \frac{\left( \frac{GJ_k}{EJ_{yz}} + 1 \right)}{r^2 \left[ \frac{\pi}{EJ_{yz}} + \frac{1}{GJ_k} \left( \pi - \frac{\pi}{8} \right) \right]} + \theta \frac{4}{\pi r \left[ \frac{\pi}{EJ_{yz}} + \frac{1}{GJ_k} \left( \pi - \frac{\pi}{8} \right) \right]}$$

После преобразования получим

$$X_5 = \frac{\theta E h b \left[ \frac{R}{r} \left( \frac{4\beta h^2}{b^2} + 1 \right) + \frac{4}{\pi} \right]}{3r \left( \frac{4\pi}{b^2} + \frac{2,748}{\beta h^2} \right)}$$

От действия момента  $X_5$  в поперечном сечении упругого элемента с угловой координатой  $\varphi$  возникают изгибающий момент  $M_{H5} = X_5 \sin \varphi$  и крутящий момент  $M_{K5} = X_5 \cos \varphi$ .

Напряжения, возникающие в упругом элементе от действия момента  $M_{H5}$

$$\sigma_5 = \frac{2E\theta \sin \varphi \left( \frac{4\beta h^2}{b^2} \cdot \frac{R}{r} + 1,273 \right)}{rb \left( \frac{4\pi}{b^2} + \frac{2,748}{\beta h^2} \right)}. \quad (23)$$

Например, для муфты с U-образными упругими элементами по ГОСТ 95.10000-83[2]

$$\frac{h}{b} \cong 0,3; \quad (24)$$

$$\beta \cong 0,269. \quad (25)$$

Близкие к указанным в (24) и (25) значения  $\frac{h}{b}$  и  $\beta$  имеют муфты «Мультикросс»[3].

Подставляя (24) и (25) в (23), получим

$$\sigma_5 = \frac{2E\theta \sin \varphi \left( 0,09684 \frac{R}{r} + 1,273 \right)}{rb \left( \frac{4\pi}{b^2} + \frac{2,748}{\beta h^2} \right)}.$$

Далее, подобно тому, как это сделано для момента  $M_{H6}$ , получим

$$\frac{E_1}{r_1^2} = \frac{E_2}{r_2^2} \cdot \frac{0,09684R + r_2}{0,09684 + r_1} = \dots = \frac{E_i}{r_i^2} \cdot \frac{0,09684R + 1,273r_i}{0,09684R + 1,273r_i}. \quad (26)$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} M_{(5)_2} &= \frac{0,09684R + 1,273r_2}{0,09684R + 1,273r_1}, \\ M_{(5)_2} &= \frac{0,09684R + 1,273r_3}{0,09684R + 1,273r_i}, \\ &\dots\dots\dots \\ M_{(5)_2} &= \frac{0,09684R + 1,273r_i}{0,09684R + 1,273r_1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Подставим (27) в (26). Получим

$$\frac{E_1}{r_1^2} = \frac{E_2}{r_2^2} M_{(5)_2} = \dots = \frac{E_i}{r_i^2} M_{(5)_i}. \quad (28)$$

Средние значения сомножителей  $M_{(5)_{\text{ср}}}$  достаточно хорошо описывает функция

$$M_{(5)_{\text{ср}}} = 1,21^{2p}, \quad (29)$$

что позволяет переписать соотношение (28) в виде

$$\frac{E_1}{r_1^2} = \frac{E_i}{r_i^2} 1,21^{2p}. \quad (30)$$

Такой же результат получен при действии на упругий элемент крутящего момента  $M_{\kappa 5}$ . В выражениях (29) и (30) величину  $p$  определяют по формуле (22).

Рассмотрим действие на упругий элемент силы  $X_4$

$$X_4 = R \cdot \sin \theta \frac{\left( \frac{GJ_k}{EJ_{yz}} + 1 \right)}{r^2 \left[ \frac{\pi}{EJ_{yz}} + \frac{1}{GJ_k} \left( \pi - \frac{8}{\pi} \right) \right]} + \theta \frac{4}{\pi r^2 \left[ \frac{\pi}{EJ_{yz}} + \frac{1}{GJ_k} \left( \pi - \frac{8}{\pi} \right) \right]}.$$

После преобразования получим

$$X_4 = \frac{\theta E h b \left[ \frac{R}{r} \left( \frac{4\beta h^2}{b^2} + 1 \right) + \frac{4}{\pi} \right]}{3r \left( \frac{4\pi}{b^2} + \frac{2,748}{\beta h^2} \right)}.$$

От действия силы  $X_4$  в поперечном сечении упругого элемента с угловой координатой  $\varphi$  возникают изгибающий момент  $M_{H4} = X_4 r \sin \varphi$  и крутящий момент  $M_{K4} = X_4 r (1 - \cos \varphi)$ . Напряжения, возникающие от действия момента  $M_{H4} \sigma_4 = \sigma_5$  и от действия момента  $M_{K4} \tau_4 = \tau_5$ . Поэтому при действии силы  $X_4$  справедливо соотношение (30).

Рассмотрим действие на упругий элемент момента  $X_3$ .

$$X_3 = R(1 - \cos \theta) \frac{2EJ_{yx}}{\pi r^2},$$

где

$$J_{yx} = \frac{bh^3}{12}.$$

Напряжения, возникающие в упругом элементе от действия изгибающего момента  $X_3$

$$\sigma_3 = \frac{X_3}{W_{yx}},$$

где  $W_{yx} = \frac{bh^2}{6}$ .

Тогда

$$\sigma_3 = \frac{E}{r^2} \cdot \frac{R(1 - \cos \theta)h}{\pi}.$$

Для упругого элемента с радиусом  $r_1$

$$\sigma_{31} = \frac{E_1}{r_1^2} \cdot \frac{R(1 - \cos \theta)h_1}{\pi} \quad (31)$$

Для упругого элемента с радиусом  $r_2$

$$\sigma_{32} = \frac{E_2}{r_2^2} \cdot \frac{R(1 - \cos \theta)h_2}{\pi} \quad (32)$$

Подставляя (31) и (32) в (9), принимая во внимание (13), получим

$$\frac{E_1}{r_1^2} = \frac{E_2}{r_2^2} \quad (33)$$

Аналогично

$$\frac{E_{i-1}}{r_{i-1}^2} = \frac{E_i}{r_i^2} \quad (34)$$

На основании (33) и (34) можно записать

$$\frac{E_1}{r_1^2} = \frac{E_i}{r_i^2} \quad (35)$$

Рассмотрим действия на упругий элемент силы  $X_2$

$$X_2 = R(1 - \cos \theta) \frac{2EJ_{yz}}{\pi r^3}.$$

От действия силы  $X_2$  в поперечном сечении упругого элемента с угловой координатой  $\varphi$  возникает изгибающий момент

$$M_{H2} = X_2 r (1 - \cos \varphi) = R(1 - \cos \theta) (1 - \cos \varphi) \frac{2EJ_{yz}}{\pi r^2}.$$

Далее, подобно тому, как это сделано для момента  $X_3$ , получим соотношение (35).

Рассматривая соотношения (21), (30) и (35) видим, что невозможно получить единое соотношение для обеспечения максимальной нагрузочной способности при действии всех силовых факторов. Сопоставим величины максимальных напряжений от разных силовых

факторов. Максимальные напряжения возникают от момента  $X_6$ . Так как  $\sigma_{2\max} = \sigma_3$ , то рассмотрим соотношение  $(\sigma_{2\max} + \sigma_3) / \sigma_{6\max}$ , которое сильно изменяется в зависимости от  $\theta$ . Обычно угол закручивания муфты с U-образными упругими элементами при нагружении номинальным вращающим моментом  $\theta = 12 \dots 18,5^\circ$ . При этом следует учитывать, что  $\sigma_6$  изменяется от нуля до максимального значения, в то время как  $\sigma_3 = \text{const}$ . Поэтому можно принять

$$[\sigma_{2\max} + \sigma_3 / \sigma_{6\max}]_{cp} = 0,25; [\sigma_{4\max} + \sigma_5 / \sigma_{6\max}]_{cp} = 0,525.$$

Среднее значение показателя степени в соотношениях (21), (30) и (35) найдём, учитывая удельный вес напряжений от каждого силового фактора

$$p_{cp} = 1,155 p. \quad (36)$$

Подставляя (22) в (36), получим

$$p_{cp} = 1,155 \left( \frac{2}{n} + i - 2 \right),$$

что позволяет заменить соотношения (21), (30) и (35) единым соотношением

$$\frac{E_1}{r_1^2} = \frac{E_i}{r_i^2} 1,21^{p_{cp}}.$$

Выполнение упругих элементов равнопрочными позволяет максимально загрузить каждый из них и, следовательно, повысить нагрузочную способность муфты.

### Список литературы

1. Ряховский О.А., Леликов О.П., ред. Атлас конструкций узлов и деталей машин. Москва, изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009, 400 с.
2. ОСТ 95.10000-83.
3. Ряховский О.А., Иванов С.С. Справочник по муфтам. – Л.: Политехника, 1991. – 384 с.: ил.