

## Рост давления в плоской щели при замерзании теплоносителя

# 11, ноябрь 2014

Товарных Г. Н.

УДК: 624.072: 536.42

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

[tovarnjx@yandex.ru](mailto:tovarnjx@yandex.ru)

Назначение систем терморегулирования состоит в том, что бы обеспечить заданный температурный режим элементов конструкции машин и механизмов, их приборов и оборудования. Для управляемого распределения температуры часто используют замкнутые жидкостные циркуляционные системы. Важным вопросом при этом является выбор теплоносителя с оптимальными теплофизическими характеристиками. Работоспособность системы терморегулирования должна быть обеспечена в широком диапазоне изменения температур. Большой практический интерес представляет собой вопрос сохранения работоспособности системы терморегулирования при временном изменении агрегатного состояния теплоносителя. В данной статье рассматривается задача об изменении давления в теплоносителе при его замерзании в плоской щели. Так как плотность твердой и жидкой фаз отличаются, то при замерзании теплоносителя изменяется объем, который он занимает в щели и под действием разности давлений между внешней средой и внутренней областью происходит деформация стенок канала с теплоносителем. Принимая предположение о не сжимаемости твердой и жидкой фаз, можно приравнять изменение объема внутренней области щели за счет деформации ограждающих стенок к изменению объема теплоносителя за счет изменения агрегатного состояния.

В качестве примера рассмотрим плоскую щель круглой формы (Рис. 1). Боковые стенки и дно считаем теплоизолированными и абсолютно жесткими. Предположим, что замерзание происходит в верхней части щели, температура жидкости постоянна и равна температуре кристаллизации, а граница раздела твердой и жидкой фаз является плоской.

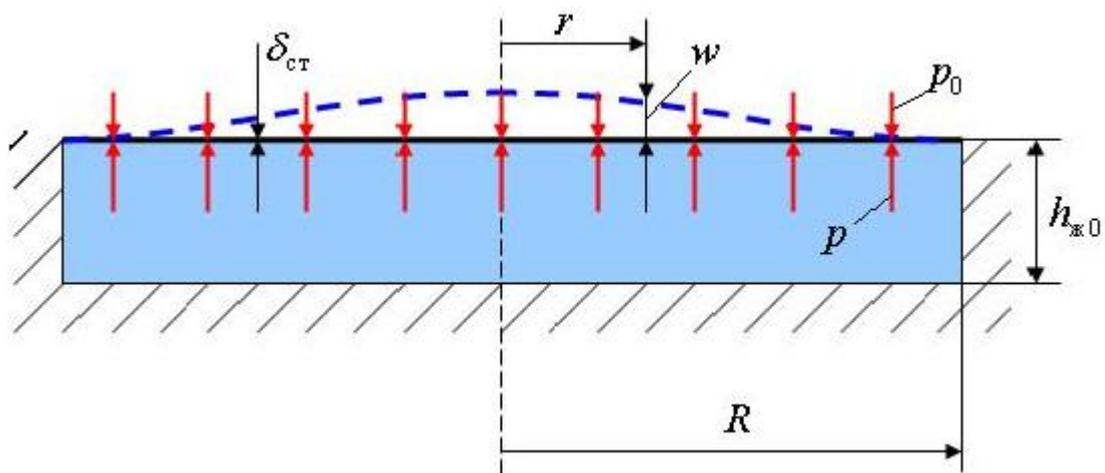


Рис. 1. Изгиб верхней пластины щели круглой формы под действием избыточного внутреннего давления.

Изменение объема теплоносителя за счет изменения агрегатного состояния можно записать в виде

$$\Delta V_{\text{т}} = \pi R^2 \xi \left( \frac{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}} \right), \quad (1)$$

где  $\xi$  – толщина слоя твердой фазы,  $\rho_{\text{ж}}$  – плотность жидкой фазы,  $\rho_{\text{т}}$  – плотность твердой фазы,  $R$  – радиус пластины.

Рассмотрим случай  $\rho_{\text{ж}} \succ \rho_{\text{т}}$ . Перемещения круглой защемлённой пластины, нагруженной давлением можно определить из выражения [1]

$$w = \frac{\Delta p}{64D} (R^2 - r^2), \quad (2)$$

где

$$D = \frac{E \delta_{\text{ст}}^3}{12(1 - \mu^2)},$$

$$\Delta p = p - p_0,$$

$p$  – давление на внутренней стороне пластины,  $p_0$  – внешнее давление,  $\delta_{\text{ст}}$  – толщина пластины,  $r$  – текущий радиус,  $w$  – перемещение,  $E$  – модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона.

Изменение внутреннего объема щели, вызванного изгибом верхней пластины, равно

$$\Delta V_w = 2\pi \int_0^R r w dr = \frac{2\pi \Delta p}{64D} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr = \frac{\pi \Delta p R^6}{192D}. \quad (3)$$

Если изгибаются и верхняя и нижняя пластины (случай, когда нижняя пластина не является абсолютно жесткой), то

$$\Delta V_w = \frac{\pi \Delta p R^6}{96D}.$$

Приравнявая соотношения (1) и (3), получим

$$\Delta p = \frac{192D}{R^4} \xi \left( \frac{\rho_{\text{ж}} - \rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}} \right).$$

После приведения к безразмерному виду имеем

$$\bar{p} = \frac{16\bar{E}\bar{\delta}_{\text{ст}}^3}{(1-\mu^2)} \bar{\xi} (1 - k_\rho) + 1. \quad (4)$$

Здесь

$$\bar{p} = \frac{p}{p_0}, \quad \bar{E} = \frac{E}{p_0}, \quad \bar{\delta}_{\text{ст}} = \frac{\delta_{\text{ст}}}{R}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{R}, \quad k_\rho = \frac{\rho_{\text{т}}}{\rho_{\text{ж}}}.$$

Для шарнирно опертой пластины получаем

$$w = \frac{\Delta p}{16D} \left( \frac{(5+\mu)}{4(1+\mu)} R^4 - \frac{(3+\mu)}{2(1+\mu)} R^2 r^2 + \frac{1}{4} r^4 \right),$$

$$\Delta V_w = 2\pi \int_0^R r w dr = \frac{\pi \Delta p R^6}{192D} \frac{(7+\mu)}{(1+\mu)},$$

$$\bar{p} = \frac{16\bar{E}\bar{\delta}_{\text{ст}}^3}{(1-\mu)(7+\mu)} \bar{\xi} (1 - k_\rho) + 1. \quad (5)$$

Рассмотрим процесс кристаллизации жидкости. В качестве первого приближения примем предположение о том, что теплофизические свойства твердой фазы постоянны, температура кристаллизации не зависит от давления, а температура в стенке и твердой фазе распределена по линейному закону (рис. 2).

Зависимость толщины слоя твердой фазы от времени можно определить из условия Стефана на границе раздела жидкой и твердой фаз

$$\frac{T_{\text{ж}} - T_{\text{вн}}}{\frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{\xi}{\lambda_{\text{т}}}} = L \rho_{\text{т}} \frac{d\xi}{d\tau}.$$

Здесь  $L$  – теплота кристаллизации,  $\lambda_{\text{ст}}$  – теплопроводность стенки,  $\lambda_{\text{т}}$  – теплопроводность твердой фазы,  $T_{\text{вн}}$  – температура наружной поверхности стенки,  $T_{\text{ж}}$  – температура жидкой фазы.

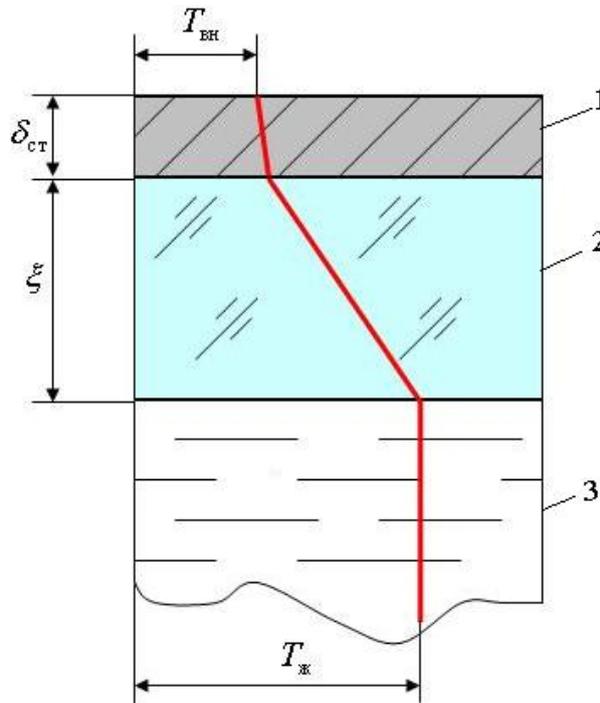


Рис. 2. Распределение температур в исследуемой области: 1- пластина; 2- слой льда; 3- жидкая фаза.

Запишем условие Стефана в безразмерном виде

$$\frac{1 - \bar{T}_{\text{вн}}}{k_1 \bar{\delta}_{\text{ст}} + \bar{\xi}} = k_2 \frac{d\bar{\xi}}{dFo}, \quad (7)$$

где

$$k_1 = \frac{\lambda_{\text{т}}}{\lambda_{\text{ст}}}, \quad k_2 = \frac{L}{T_{\text{ж}} c_{\text{т}}}, \quad \bar{T}_{\text{вн}} = \frac{T_{\text{вн}}}{T_{\text{ж}}}, \quad Fo = \frac{a_{\text{т}} \tau}{R^2},$$

$$a_{\text{т}} = \frac{\lambda_{\text{т}}}{c_{\text{т}} \rho_{\text{т}}}, \quad \bar{\xi} = \frac{\xi}{R}, \quad \bar{\delta}_{\text{ст}} = \frac{\delta_{\text{ст}}}{R}.$$

После интегрирования получаем

$$Fo = \frac{k_2}{(1 - \bar{T}_{\text{BH}})} \left( k_1 \bar{\delta}_{\text{CT}} \bar{\xi} + \frac{\bar{\xi}^2}{2} \right).$$

Разрешим полученное соотношение относительно величины  $\bar{\xi}$ , имеющей физический смысл:

$$\bar{\xi} = k_1 \bar{\delta}_{\text{CT}} \left( \sqrt{1 + \frac{2(1 - \bar{T}_{\text{BH}}) Fo}{k_2 (k_1 \bar{\delta}_{\text{CT}})^2}} - 1 \right). \quad (8)$$

После подстановки соотношения (8) в решения (4), (5) получаем для случаев жесткого и шарнирного закрепления пластины выражение

$$\bar{p} = \frac{16 \bar{E} \bar{\delta}_{\text{CT}}^4}{(1 - \mu^2)} k_1 \left( \sqrt{1 + \frac{2(1 - \bar{T}_{\text{BH}}) Fo}{k_2 (k_1 \bar{\delta}_{\text{CT}})^2}} - 1 \right) (1 - k_\rho) + 1, \quad (9)$$

$$\bar{p} = \frac{16 \bar{E} \bar{\delta}_{\text{CT}}^4}{(1 - \mu)(7 + \mu)} k_1 \left( \sqrt{1 + \frac{2(1 - \bar{T}_{\text{BH}}) Fo}{k_2 (k_1 \bar{\delta}_{\text{CT}})^2}} - 1 \right) (1 - k_\rho) + 1. \quad (10)$$

Эти выражения справедливы и для случая, когда нижняя пластина не теплоизолирована и имеет такую же толщину, как и верхняя. При этом обе пластины изгибаются одинаковым образом. Внутренний объем щели за счет деформации пластин увеличивается в два раза, но так же в два раза увеличивается объем твердой фазы вследствие дополнительной кристаллизации жидкости на нижней пластине. Поэтому зависимость давления в щели от времени не изменится.

Если пренебречь тепловым сопротивлением стенки, то условие Стефана (7) принимает вид

$$\frac{1 - \bar{T}_{\text{BH}}}{\bar{\xi}} = k_2 \frac{d\bar{\xi}}{dFo}.$$

После интегрирования получаем

$$Fo = \frac{k_2 \bar{\xi}^2}{2(1 - \bar{T}_{\text{BH}})}, \quad \bar{\xi} = A \sqrt{Fo},$$

где  $A = \sqrt{\frac{2(1 - \bar{T}_{\text{BH}})}{k_2}}$ .

Более точное аналитическое решение может быть получено, если температуру не задавать линейно распределенной в твердой фазе, а определять из решения уравнения теплопроводности [7]. В этом случае

$$\bar{\xi} = \beta\sqrt{Fo}. \quad (11)$$

Коэффициент  $\beta$  определяется из трансцендентного уравнения

$$\frac{K_2 \beta}{2} = \frac{\exp\left(-\frac{\beta^2}{4}\right)}{\int_0^\beta \exp\left(-\frac{\beta^2}{4}\right) d\beta}. \quad (12)$$

Уравнения (9) и (10) принимают при этом вид

$$\bar{p} = \frac{16\bar{E}\bar{\delta}_{ст}^3}{(1-\mu^2)} \beta\sqrt{Fo}(1-k_\rho) + 1, \quad (13)$$

$$\bar{p} = \frac{16\bar{E}\bar{\delta}_{ст}^3}{(1-\mu)(7+\mu)} \beta\sqrt{Fo}(1-k_\rho) + 1. \quad (14)$$

Максимальное значение давления принимает при полном замерзании жидкости. Используя закон сохранения массы жидкости до и после ее кристаллизации, можно записать

$$\rho_{ж} \pi R^2 h_{ж0} = \rho_{т} \pi R^2 \xi_{пр},$$

Или

$$\xi_{пр} = \frac{\bar{h}_{ж0}}{k_\rho}. \quad (15)$$

Здесь  $\xi_{пр}$  - приведенная толщина слоя твердой фазы;  $h_{ж0}$  - начальная высота щели, занимаемая жидкой фазой.

После подстановки соотношения (15) в решение (4) и (5) получаем для случаев жесткого и шарнирного закрепления верхней пластины при отсутствии деформации нижней пластины:

$$\bar{p}_{max} = \frac{16\bar{E}\bar{\delta}_{ст}^3}{(1-\mu^2)} \frac{\bar{h}_{ж0}}{k_\rho} (1-k_\rho) + 1, \quad (16)$$

$$\bar{p}_{max} = \frac{16\bar{E}\bar{\delta}_{ст}^3}{(1-\mu)(7+\mu)} \frac{\bar{h}_{ж0}}{k_\rho} (1-k_\rho) + 1. \quad (17)$$

Если верхняя и нижняя пластины имеют одинаковую толщину стенок и одинаковую степень деформации, то можно записать соответственно

$$\bar{p}_{\max} = \frac{8\bar{E}\bar{\delta}_{\text{ст}}^3}{(1-\mu^2)} \frac{\bar{h}_{\text{ж0}}}{k_{\rho}} (1-k_{\rho}) + 1, \quad (18)$$

$$\bar{p}_{\max} = \frac{8\bar{E}\bar{\delta}_{\text{ст}}^3}{(1-\mu)(7+\mu)} \frac{\bar{h}_{\text{ж0}}}{k_{\rho}} (1-k_{\rho}) + 1. \quad (19)$$

Полученные соотношения (13), (14) и (16)-(19) могут быть использованы в качестве исходных при обработке экспериментальных данных.

### Список литературы

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966, 635 с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Издание: "МГТУ им. Н.Э. Баумана", 1999, 592 с.
3. З а й ц е в А.М. Изгиб тонких пластинок: Методические указания к решению задач по теории упругости. - Архангельск: Изд-во ДГТУ, 1998, 21 с.
4. Колотилин А.Н., Матченко О.Н. Построение самосогласованной теории тонких пластин // Известия ТулГУ. Серия: Строительные материалы, конструкции и сооружения. Вып. 6. - Тула: Изд-во ТулГУ, 2004. с. 53-62.
5. Босаков, С. В. К решению контактной задачи для круглой пластинки // Прикладная математика и механика. — 2008. — Т. 72, № 1. — с. 59–61.
6. Каюк, Я. Ф. О динамическом изгибе слоистых пластин // Прикладная механика: межд. научный журнал . - 2009. - Том 45, N 4. - с. 133-144
7. Мейрманов А.М. Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986, 239 с.
8. Парфентьева Н.А., Самарин О.Д. О колебаниях фронта промерзания в ограждениях и численном моделировании задачи Стефана. – Строительные материалы, оборудование, технологии XXI.-№11, 2002. С.46-47
9. Гольдман Н. Л. Обратные задачи Стефана. Теория и методы решения. М.: Изд-во МГУ, 1999, 64 с.
10. Ащеулова А.С. Задача Стефана для адиабатического намораживания воды холодом гранул / А. С. Ащеулова, А. А. Храпов, В. В. Рагулин, В. И. Полтавцев // Вестник КрасГАУ. – 2007. – №1. –С.26–30
11. Ерохина О.С. Расчет времени протаивания криоботом ледяных структур, Труды IX Всеросс. научно-технич. конференции. - Воронеж, 2008, 300 с.
12. Кувыркин Г.Н., Ломохова А.В. Математическое моделирование процесса кристаллизации в установках для выращивания монокристаллов. Изв. вузов. Машиностроение, 2007, №4, с. 37– 44.

13. Крылов Д.А., Мельникова Ю.С. Математическое моделирование распределения температурных полей в криолитозоне // Студенческий научный вестник. Сборник статей четвертой научно-технической выставки «Политехника». М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. С.94-97.
14. Крылов Д.А., Сидняев Н.И. Метод расчета массовой кристаллизации многофазных реологических сред // Материалы Четвертой конференции геокриологов России. МГУ им. М.В. Ломоносова, 7-9 июня 2011 г. Т. 1. Часть 1. Физико-химия, теплофизика и механика мерзлых пород. М.: Университетская книга, 2011. С. 129-136.