

УДК 519.688

Использование технологии CUDA для моделирования обтекания кругового профиля методом вихревых элементов

*Гречкин-Погребняков С.Р., студент
кафедры «Прикладная механика»,
Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана*

*Научный руководитель: Марчевский И.К., к.ф.-м.н.,
доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана
bauman@bmstu.ru*

1. Введение

Рассмотрим задачу о моделировании обтекания кругового профиля потоком вязкой несжимаемой жидкости. Подобные задачи возникают при решении многих прикладных задач в авиации, промышленной аэродинамике, механике помещённых в жидкость конструкций. Для моделирования рассматриваемого процесса может быть использован метод вихревых элементов. Вихревые методы основаны на лагранжевом описании эволюции завихренности в области течения и, как показывает практика, позволяют получать приемлемые для инженерных целей результаты при сравнительно низких требованиях к мощности компьютеров и затратах машинного времени. Эффективность вихревых методов основана на том, что завихренность в области течения обычно локализована в достаточно компактной области вблизи и позади обтекаемого профиля, что позволяет сосредоточить вычислительные ресурсы на исследовании именно этой области [4]. Необходимо исследовать подходы к оптимизации программного кода с целью снижения временных затрат на проведение расчётов и рассмотреть возможность применения параллельных алгоритмов и организации вычислений с помощью графического процессора, что должно привести к существенному приросту скорости расчётов.

2. Постановка задачи

Движение среды описывается уравнением неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (1)$$

и уравнениями Навье – Стокса, записанными в проекциях на оси неподвижной декартовой системы координат Oxy :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta V_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta V_y. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\vec{V} = \vec{V}(x, y, t)$ — скорость среды в точке с координатами (x, y) в момент времени t , $p = p(x, y, t)$ — давление в этой точке, $\nu = \text{const}$ — коэффициент кинематической вязкости, ρ — плотность среды, Δ — оператор Лапласа.

На бесконечности ставятся граничные условия затухания возмущений:

$$\vec{V}(\vec{r}, t)|_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \rightarrow \vec{V}_\infty = \text{const}, \quad p(\vec{r}, t)|_{|\vec{r}| \rightarrow \infty} \rightarrow p_\infty = \text{const},$$

на границе K профиля — условие прилипания:

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = 0 \text{ при } \vec{r} \in K.$$

Полагаем, что начальное распределение скоростей $\vec{V}|_{t=0} = \vec{V}_0$ известно. С использованием оператора Гамильтона ∇ уравнения (1), (2) можно записать в виде:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \vec{V}. \quad (4)$$

3. Решение задачи методом вихревых элементов

Для решения поставленной задачи используется вихревой метод. Можно показать [1], что уравнение (4) можно привести к виду

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\Omega} \times [\vec{V} + \vec{W}]) = 0, \quad (5)$$

где $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{V} = \Omega \vec{k}$ — завихренность, $\vec{W} = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega}$ — диффузионная скорость [1].

Обозначив $\vec{V} + \vec{W} = \vec{U}$, получим, что если точка движется со скоростью $\vec{U}$, то

$$\left. \frac{D\vec{\Omega}}{Dt} \right|_{\vec{U}} = 0, \quad (6)$$

где $\frac{D\vec{\Omega}}{Dt}\Big|_{\vec{U}}$ — аналог субстанциональной (материальной) производной, т.е. завихренность в этой точке не меняется. Можно сказать, что в области течения S образования «новой» завихренности не происходит, а имеет место движение имеющейся завихренности со скоростью $\vec{U}$. Генерация «новой» завихренности происходит лишь на границе области течения, т.е. на обтекаемом профиле [1].

Таким образом, решение задачи вихревым методом сводится к моделированию процесса генерации завихренности на контуре и движения имеющейся завихренности в области течения.

В поставленной задаче непрерывное распределение завихренности было заменено большим количеством вихревых элементов (ВЭ) – бесконечно тонких вихревых нитей, перпендикулярных плоскости течения. При этом фактически рассматривалось распределение завихренности

$$\Omega(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i), \quad (7)$$

где $\Gamma_i = \iint_{S_i} \Omega(\vec{\xi}) dS_{\xi}$, $\vec{r}_i$ — радиус-вектор центра i -го ВЭ. Распределение завихренности, соответствующее каждому слагаемому этой суммы, и называется вихревым элементом. Соответственно, каждый ВЭ характеризуется циркуляцией Γ_i и радиус-вектором $\vec{r}_i$.

4. Генерация завихренности на профиле

Уравнение, описывающее процесс генерации завихренности на контуре, следует из граничного условия на профиле:

$$\vec{V}(\vec{r}, t) = 0 \text{ при } \vec{r} \in K.$$

Можно показать [1], что для выполнения условия прилипания на неподвижном контуре достаточно потребовать выполнения условия непротекания

$$\vec{V}(x, y, t) \cdot \vec{n}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in K, \quad (8)$$

где $\vec{n}(x, y)$ — внешняя нормаль к контуру в точке (x, y) . При этом вся генерируемая завихренность должна становиться частью вихревого следа.

В соответствии с теоремой Томсона о сохранении циркуляции поля скоростей по жидкому контуру [6], имеем: суммарная завихренность в области течения (сумма имеющейся завихренности и вновь генерируемой) равна постоянной величине. Поэтому если в начальный момент поле скоростей $\vec{V}_0(x, y)$ было безвихревым, то будет выполняться условие

$$\oint_K \gamma dl + \iint_S \Omega ds = 0,$$

где γ — интенсивность вихревого слоя, генерируемого на контуре, то есть суммарная завихренность в области течения должна быть равна нулю.

Для численного моделирования процесса генерации завихренности строится следующая расчетная схема (рис. 1). Контур K разбивается на N_p участков одинаковой длины (панелей). На каждом j -м участке выбирается контрольная точка K_j , и точка рождения вихря C_j , $j = 1, \dots, N_p$. Точки C_j ставились в центр, а K_j — на край соответствующего участка. В контрольных точках записывается условие непротекания (8), а в точки рождения вихрей помещаются вихревые элементы, моделирующие генерируемую завихренность, интенсивности которых Γ_{K_j} подлежат определению [8].

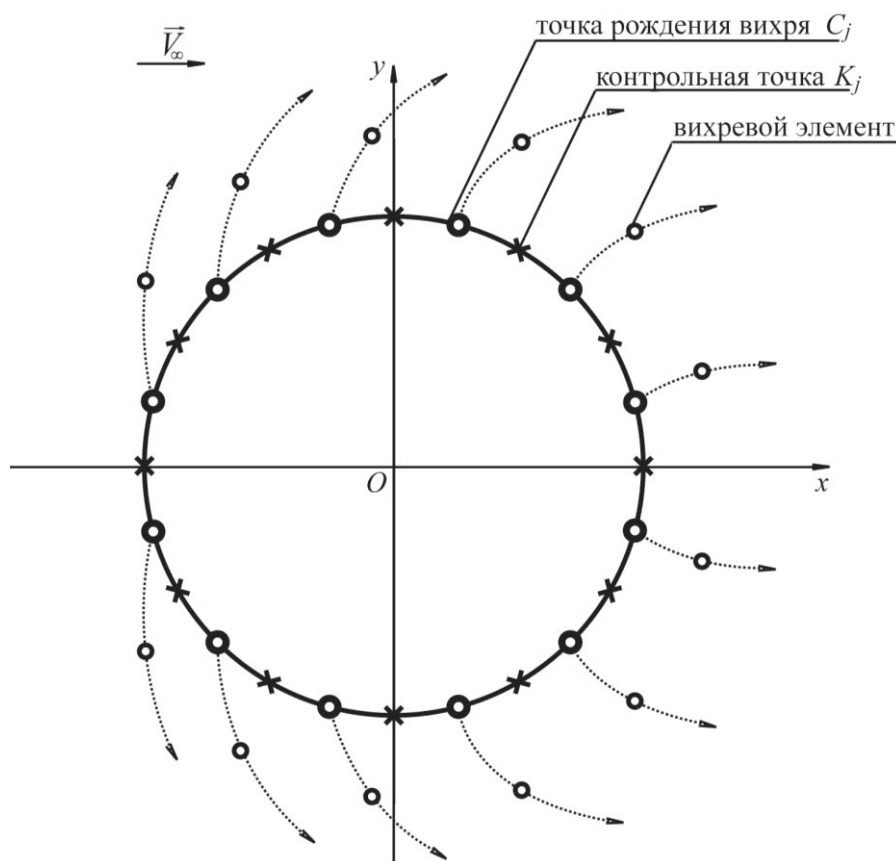


Рис. 1. РС генерации ВЭ на профиле

5. Эволюция вихревого следа

Движение завихренности описывается уравнением (6). В соответствии с теоремой Гельмгольца о разложении векторных полей [7], полная скорость течения в любой точке будет вычисляться как сумма

$$\vec{V}(x, y, t) = \vec{V}_\Omega(x, y, t) + \vec{V}_\infty, \quad (9)$$

где $\vec{V}_\infty$ — скорость потока на бесконечности, известная из постановки задачи, $\vec{V}_\Omega$ — скорость, индуцируемая завихренностью, которую можно найти из известного распределения завихренности с помощью закона Био – Савара:

$$\vec{V}_\Omega(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi}, t) \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS_\xi. \quad (10)$$

Учитывая, что рассматривается плоская задача, $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$ и можно записать

$$\vec{V}_\Omega(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \Omega(\vec{\xi}, t) \frac{\vec{k} \times (\vec{r} - \vec{\xi})}{|\vec{r} - \vec{\xi}|^2} dS_\xi. \quad (11)$$

В случае вязкой жидкости для вычисления скорости движения завихренности $\vec{U} = \vec{V} + \vec{W}$, необходимо учитывать диффузионную скорость

$$\vec{W} = -\nu \frac{\nabla \Omega}{\Omega}. \quad (12)$$

Однако в поставленной задаче исходное распределение $\Omega_{\text{исх}}$ неизвестно, известны лишь интенсивности и положения ВЭ, т.е. в задаче $\Omega_{\text{исх}}$ заменено распределением (7). Для нахождения градиента завихренности используется метод вязких вихревых доменов (ВВД) [2]. Он заключается в том, что дискретное распределение аппроксимируется гладкой функцией $\tilde{\Omega}$, так чтобы $\tilde{\Omega} \approx \Omega_{\text{исх}}$ и $\nabla \tilde{\Omega} \approx \nabla \Omega_{\text{исх}}$. Для этого используем функцию вида [2]

$$\tilde{\Omega}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \frac{I_1}{I_0}, \quad (13)$$

$$\nabla \tilde{\Omega}(\vec{r}) = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left(\frac{\nabla I_1}{I_0} - \frac{I_1 \nabla I_0}{I_0^2} \right) = \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left(\frac{\vec{I}_2}{I_0} - \frac{I_1 \vec{I}_3}{I_0^2} \right),$$

где

$$\begin{aligned} I_1(\vec{r}) &= \iint_S \Omega(\vec{\xi}) \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi \\ I_0(\vec{r}) &= 2\pi\varepsilon^* - \oint_K \varepsilon^* \vec{n} \cdot \left(\frac{\vec{r}'(|\vec{r}'| + \varepsilon^*)}{|\vec{r}'|^2} \exp\left(-\frac{|\vec{r}'|}{\varepsilon^*}\right) \right) dl_\xi, \\ \vec{I}_2(\vec{r}) &= \nabla I_1(\vec{r}) = \iint_S \frac{\vec{r} - \vec{\xi}}{|\vec{r} - \vec{\xi}| \varepsilon^*} \Omega(\vec{\xi}) \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{\xi}|}{\varepsilon^*}\right) dS_\xi, \end{aligned}$$

$$\vec{I}_3(\vec{r}) = - \oint_K \vec{n} \exp\left(-\frac{|\vec{r}'|}{\varepsilon^*}\right) dl_\xi ,$$

ε^* — малый параметр размерности длины, который выбирается на основании анализа взаимного расположения ВЭ; $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\xi}$; $\vec{n}$ — внешняя по отношению к потоку нормаль.

Тогда

$$\vec{W}(\vec{r}) = -\nu \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left(\left[\frac{\vec{I}_2}{I_0} - \frac{I_1 \vec{I}_3}{I_0^2} \right] / \frac{I_1}{I_0} \right) = \nu \lim_{\varepsilon^* \rightarrow 0} \left(-\frac{\vec{I}_2}{I_1} - \frac{\vec{I}_3}{I_0} \right). \quad (14)$$

Чтобы смоделировать движение жидкости, необходимо найти распределение скоростей и решить задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \vec{U}_j, \\ \vec{r}_j|_{t=0} = \vec{r}_{j0}, \end{cases} \quad (15)$$

Для решения задачи (15) использовался метод Эйлера:

$$\frac{\vec{r}_j(t + \Delta t) - \vec{r}_j(t)}{\Delta t} = \vec{U}(\vec{r}_j(t), t),$$

тогда

$$\vec{r}_j(t + \Delta t) = \vec{U}(\vec{r}_j(t)) \cdot \Delta t + \vec{r}_j(t). \quad (16)$$

Метод Эйлера имеет первый порядок точности, поэтому при сравнительно больших Δt полученное решение будет далеко от истинного. Однако, при моделировании обтекания профиля, величина шага по времени должна выбираться достаточно малой, чтобы обеспечить корректное моделирование процесса генерации завихренности на профиле. Методы более высокого порядка точности эффективны при моделировании эволюции завихренности в отсутствии обтекаемых профилей. Наличие профилей требует существенной модификации методов высокого порядка и разработки специальных алгоритмов реструктуризации следа.

6. Решение задачи с использованием GPU

Численное решение большинства задач, в том числе и рассмотренной в данной работе, требуют значительных временных затрат, связанных с пошаговым характером решения дифференциальных уравнений, и чем более точное и полное решение мы хотим получить, тем больший объём вычислений приходится выполнять. Смысл распараллеливания вычислений заключается в одновременном выполнении операций, которое возможно благодаря многоядерности современных процессоров. При этом максимальное ускорение, которое можно получить, распределив выполнение программы

на N параллельно работающих ядер, определяется законом Амдала [9]:

$$S = \frac{1}{(1 - P) + \frac{P}{K}},$$

где P – это доля кода, который может быть распараллелен. Из этого закона видно, что максимальное ускорение обусловлено не только количеством вычислительных ядер, но и используемыми алгоритмами и методами.

Центральные процессоры, хоть и имеют значительные вычислительные возможности, имеют весьма ограниченное количество ядер: около 20 в экспериментальных разработках и от 4 до 8 в самых производительных процессорах серийного производства.

Отличительной особенностью вычислений на GPU является то, что одновременно могут производиться сотни и даже тысячи операций, благодаря тому, что один процессор содержит соответствующее число ядер. Современные GPU позволяют проводить математические вычисления с двойной точностью. Обратной стороной использования графического процессора является то, что он расположен на отдельном устройстве со своей оперативной памятью, куда нужно предварительно загрузить данные для вычислений и после этого выгрузить обратно для вывода результата. Это является «узким местом» такой методики, так как требует определённых временных затрат (зачастую больших, чем необходимо непосредственно для вычислений), поэтому при написании программного кода было минимизировано количество операций обмена данными между видеокартой и оперативной памятью компьютера: в начале выполнения программы на GPU загружается вся информация о профиле и о параметрах потока, затем все вычисления производятся непосредственно на графическом процессоре, при этом результаты выводятся не на каждом шаге, а с произвольным интервалом (при проведении расчётов вывод результатов происходил раз в сто шагов). Ещё одной особенностью является то, что в архитектуре графического процессора на несколько арифметико-логических устройств приходится лишь одно устройство управления [9], поэтому при разработке алгоритмов должны быть выделены части кода, в которых производятся идентичные вычисления (естественно, с разными входными данными). Для вычислений на GPU можно использовать технологию CUDA (Compute Unified Device Architecture) – программно-аппаратную архитектуру параллельных вычислений, разработанную компанией NVIDIA.

7. Вычислительный эксперимент

Рассматривалась задача об обтекании неподвижного кругового профиля потоком вязкой несжимаемой жидкости. В момент времени $T_0 = 0$, который был принят за начало

отсчёта в численном моделировании, завихренность в рассматриваемой области отсутствовала. При $t > T_0$ происходит образование вихревых элементов на профиле и их движение в расчётной области.

В ходе численного моделирования во-первых производилось сравнение полученной картины вихревого следа с экспериментальными данными [3], а во-вторых измерялось время расчётов для анализа целесообразности использования графических ускорителей в дальнейших исследованиях.

Далее представлены результаты расчётов со следующими безразмерными параметрами среды: кинематической вязкостью $\nu = 0,001$, скоростью набегающего потока $V_\infty = 1,0$, плотностью среды $\rho = 1,0$. Радиус профиля $R = 0,5$, то есть при проведении вычислительного эксперимента число Рейнольдса Re полагалось равным 1000. Шагом выполнения расчётов полагался $\Delta t = 0,001$, количество панелей $N_p = 1000$. На рис. 2 показан полученный вихревой след в различные моменты времени.

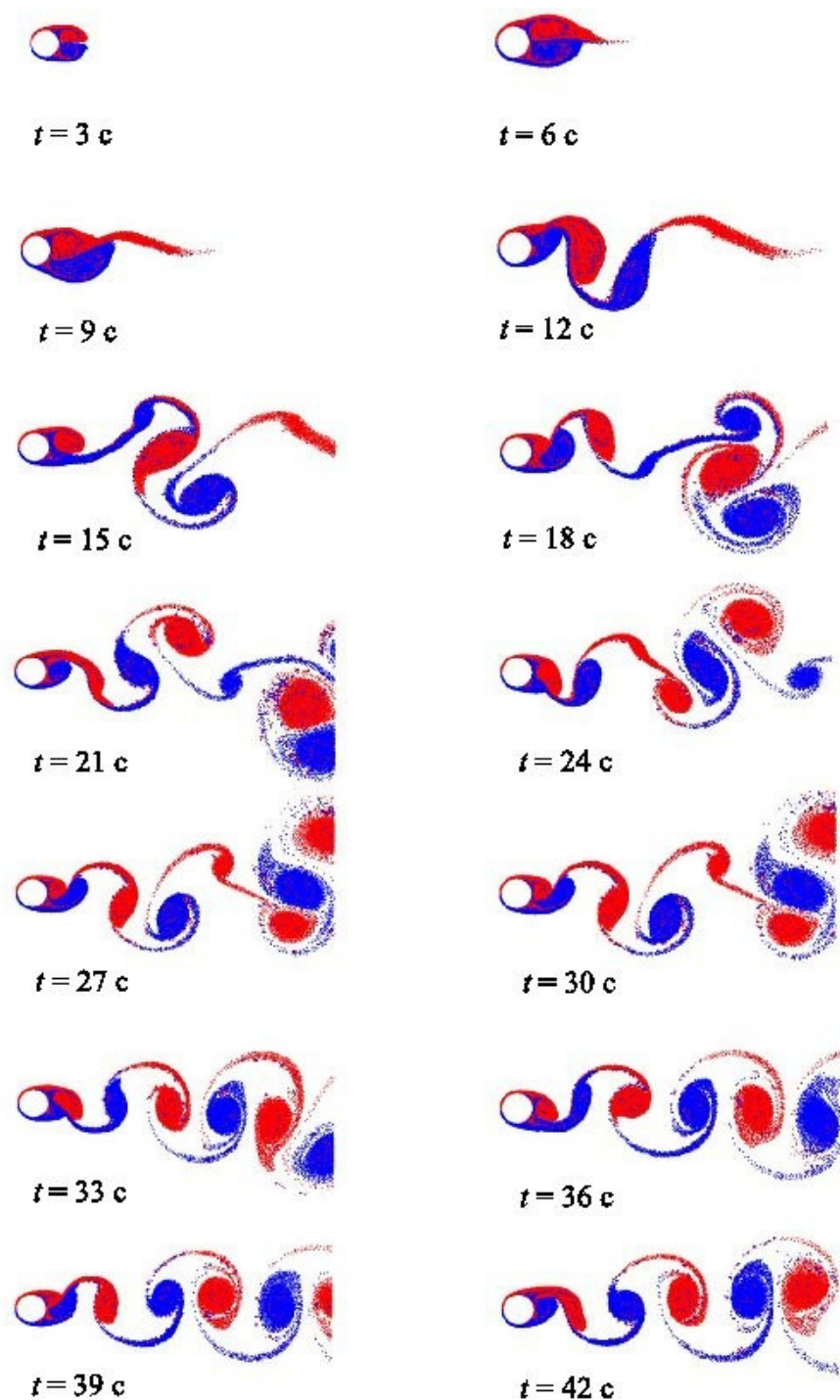


Рис. 2. Эволюция вихревого следа за круглым профилем

Время вычисления одного шага по времени напрямую зависит от количества ВЭ в расчёте. С увеличением количества шагов растёт (до некоторого предела) и количество ВЭ. В следующей таблице отражена зависимость общего времени выполнения расчёта от количества ВЭ в расчётной области и количества шагов по времени.

Таблица. Количество ВЭ и общее время расчёта в зависимости от номера шага

Номер шага	Количество ВЭ	Общее время расчёта, с
------------	---------------	------------------------

100	2655	4
200	3552	10
400	5232	27
600	6579	51
800	8234	86
1000	9762	135
2000	15001	531
3000	19129	1132
4000	23248	1998
5000	25884	3102
6000	28520	4407
7000	31075	5940
8000	33621	7720
9000	36887	9803
10000	39828	12244

На рис. 3 показан график зависимости временных затрат от количества ВЭ в расчёте.

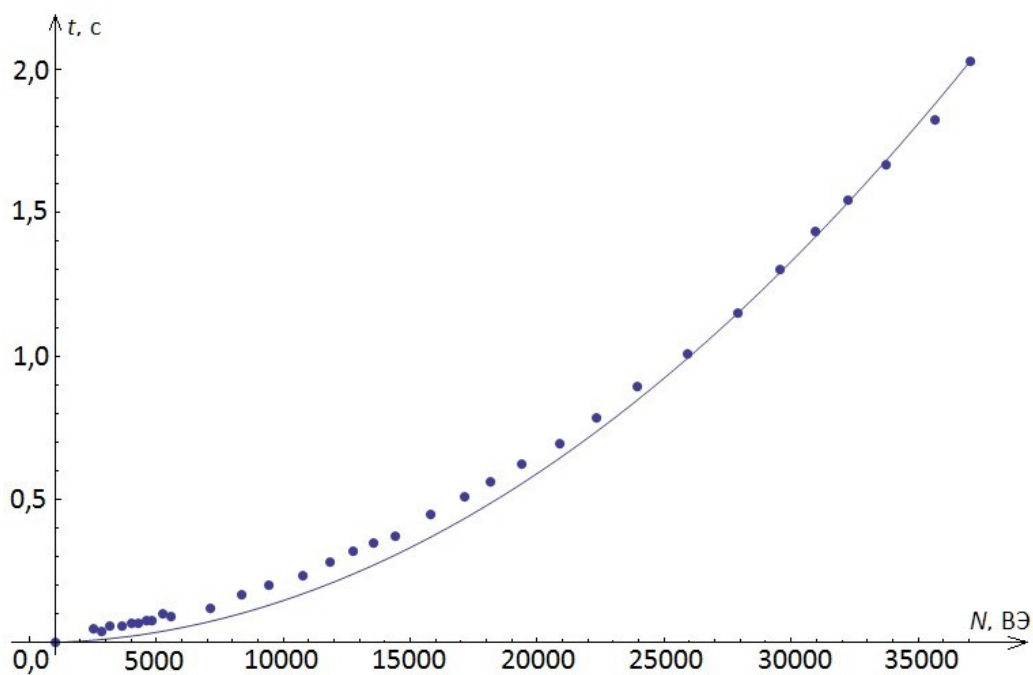


Рис. 3. Зависимость временных затрат от количества ВЭ

На графике линией показана параболa $t = kN^2$ с эмпирически подобранным коэффициентом $k = 1,5 \cdot 10^{-9}$ с, точками — полученные результаты. Как только вихревой след достигает границы расчётной области, количество ВЭ перестаёт расти и среднее время, необходимое для выполнения одного шага, становится постоянным. При выполнении расчётов предельное количество ВЭ в расчётной области было $N \approx 60000$. Это количество зависит от количества точек рождения на профиле, шага по времени и

границы отрисовки дальнего следа.

Применяя изложенный подход, удалось достичь ускорения расчетов примерно в 2,8 раза по сравнению с высокопроизводительным 16-ядерным вычислительным кластером [5]: время расчёта одного шага при 30000 ВЭ на домашнем компьютере с помощью видеокарты NVidia GTX670 составило 1,4 с, на кластере — 4 с. Эти данные позволяют сделать вывод о целесообразности применения технологии CUDA для решения задач вычислительной гидродинамики вихревыми методами.

Список литературы

1. Дынникова Г.Я. Движение вихрей в двумерных течениях вязкой жидкости // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 5. С. 11–19.
2. Дынникова Г.Я. Лагранжев подход к решению нестационарных уравнений Навье — Стокса // ДАН. 2004. Т. 399. №1. С. 42–46.
3. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.
4. Сарпкайя Т. Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Современное машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
5. Лукин В.В., Марчевский И.К., Морев В.С., Попов А.Ю., Шаповалов К.Л., Щеглов Г.А. Учебно-экспериментальный вычислительный кластер. Ч. 2. Примеры решения задач // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2012. № 4. С. 82–102.
6. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
7. Сэффмен Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000. 375 с.
8. Марчевский И.К. Математическое моделирование обтекания профиля и исследование его устойчивости в потоке по Ляпунову: Дис. ...канд. физ.-мат. наук. М., 2008. 119 с.
9. Боресков А.В. Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA. М.: Изд-во Московского университета, 2012. 336 с.