

УДК 629.113 : 629.11.012

Нелинейные колебания в подвеске транспортных систем с двумя степенями свободы

***Петров И.П.**, студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Колесные машины»*

***Петухов А.И.**, студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана,
кафедра «Колесные машины»*

Научный руководитель: Смирнов В.Ф., к.т.н., доцент

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана
kafsm10@sm.bmstu.ru*

Теоретическое исследование колебаний транспортных систем или их элементов производится заменой той или иной эквивалентной колебательной системой, для которой составляются тем или иным методом линейные дифференциальные уравнения движения. Такая замена (линеаризация) основывается на усреднении, то есть введении некоторых постоянных за цикл величин вместо переменных. Однако линейные теории описывают действительные механические явления только приближенно, с недостаточной точностью. Важно заметить, что линеаризация значительно изменяет структуру дифференциальных уравнений, таким образом, многие явления не отражаются даже качественно. С другой стороны, линеаризацию уравнений использовать нельзя, если введение в механическую систему элементов, дающих нелинейность, преследует определенные цели, а именно получение заданных качеств и характеристик движения.

Основным устройством, защищающим транспортное средство, водителя и груз от динамических воздействий при езде по дорогам и сводящим колебания и вибрации к приемлемому уровню, является подвеска [1], обеспечивающая передачу всех видов сил и моментов, действующих между колесом и кузовом автомобиля. В подвеске различают три вида устройств: упругое, демпфирующее и направляющее. Чтобы уменьшить потери энергии в демпфирующих элементах – амортизаторах, которая, в конечном счете, приводит к дополнительному расходу топлива, и используются подвески с нелинейными характеристиками.

Ставится задача изучения нелинейных колебания двухмассовой системы. В качестве объектов исследований используем кресло водителя автомобиля (*рис.1*) и прицепное звено (*рис.2*) для перевозки хрупких грузов, а также особо чувствительных к динамическим воздействиям предметов или конструкций. Оба этих устройства имеют оригинальную конструкцию, с применением механизма, в состав которого входят эллиптические колёса, что позволяет получить нелинейную жесткостную рабочую характеристику [2].



Рис. 1. Кресло водителя с нелинейным поддресориванием

Опорная конструкция кресла, обеспечивающая поддресоривание, выполнена по рычажной схеме «параллелограмм». Основные элементы: торсион, пара эллиптических колёс, демпфирующее устройство (амортизатор), также подшипниковые узлы.

На *рис.2* представлена 3d-модель опорно-поддресоривающей конструкции для груза, созданная в программе САПР SolidWorks. Подробная конструкция подвески прицепного звена была рассмотрена в статье [2]. Детально устройство показано на *рис.3*. Подшипниковые опоры 9 и 12 жёстко связаны с тележкой. Вокруг них совершают возвратно-вращательное движение рычаги 5 и 8, на которых посредством подшипниковых

опор 10 держится полка 11 с грузом 6. Вместе с рычагом, как единое целое, совершает возвратно-поступательное движение эллиптический элемент (ЭЭ) 2. С ним связан ЭЭ 1: на ходе сжатия ЭЭ 2 толкает ЭЭ 1, на ходе отбоя ЭЭ 1 тянет ЭЭ 2 посредством ремня 13. Ремень закреплен в натянутом состоянии на ЭЭ 1 и ЭЭ 2 с помощью зажимов 3. ЭЭ 1 скручивает торсион 4. Между рычагами установлен двухтрубный амортизатор 7.

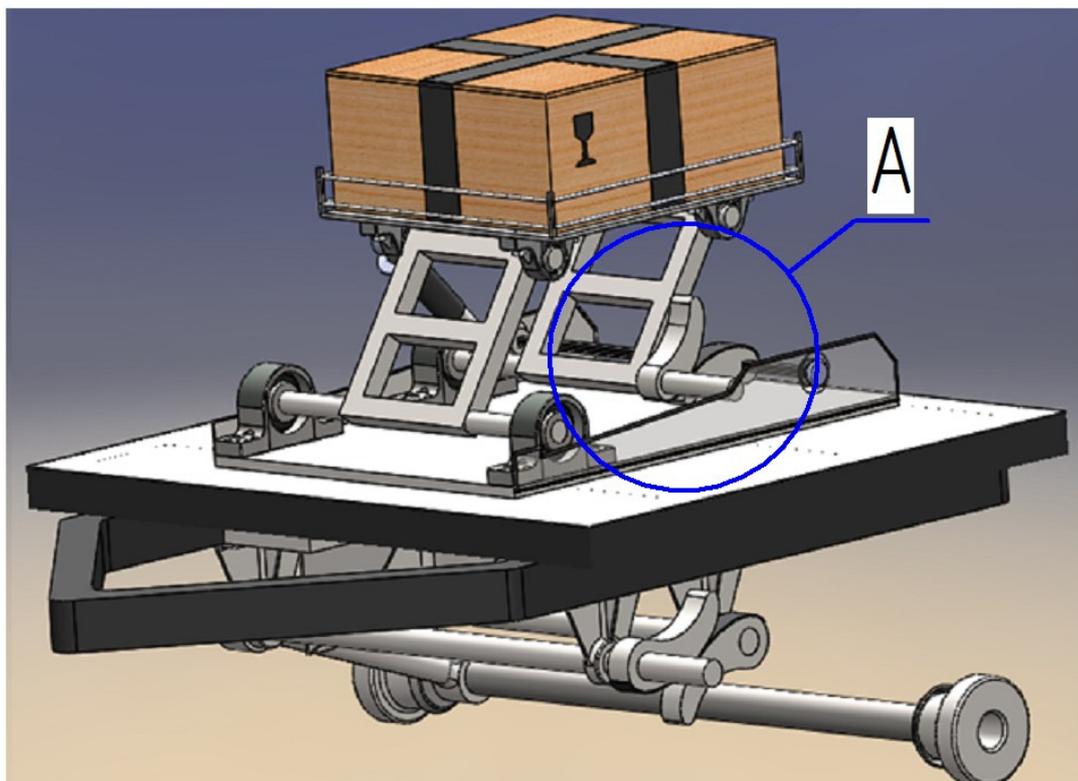


Рис. 2. Опорно-подрессоривающая конструкция на прицепном звене

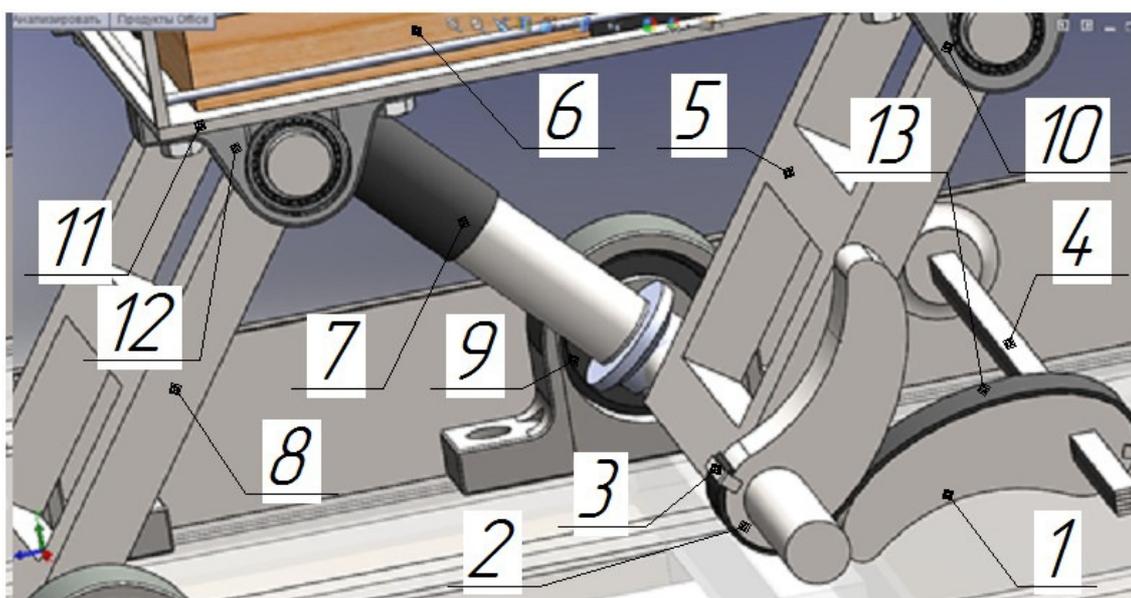


Рис. 3. Вид А на рис. 2

Теоретическое исследование зависимости угла поворота φ_2 торсиона от угла поворота рычагов подвески φ_1 рассмотрено в статье [2]. Получено следующее выражение для этой зависимости:

$$\varphi_2 = 2 \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{(a+c) \operatorname{tg}(\varphi_1/2)}{a-c} \right), \quad (1)$$

где a и c – параметры эллиптических колес.

Графически зависимость по уравнению (1) представлена на рис.4, где выбор начала системы координат может быть произвольным в любом сечении графика, с целью получения необходимых рабочих свойств.

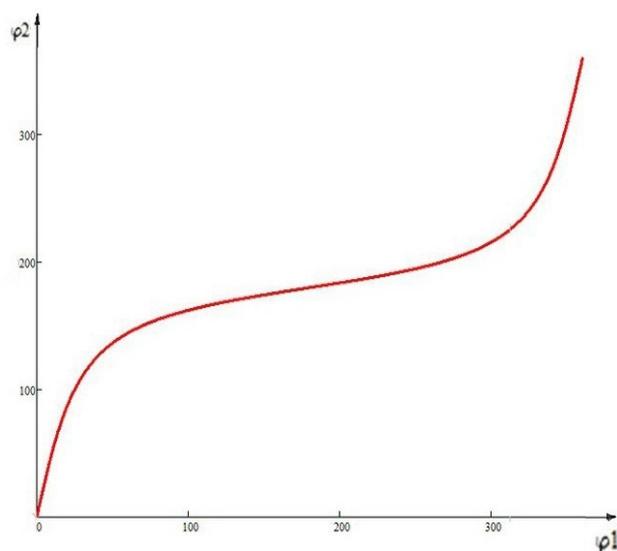


Рис. 4. График теоретической зависимости

При нахождении дифференциальных уравнений можно использовать уравнения Лагранжа II рода или метод Даламбера. Применение уравнений Лагранжа затруднено, в связи с тем, что подсчет потенциальной энергии не может быть произведен из-за отсутствия достоверных данных об упругих сил связей между массами. Для составления дифференциальных уравнений воспользуемся принципом Даламбера. На рис.5 представлен фрагмент многомассовой упругой системы с демпфированием.

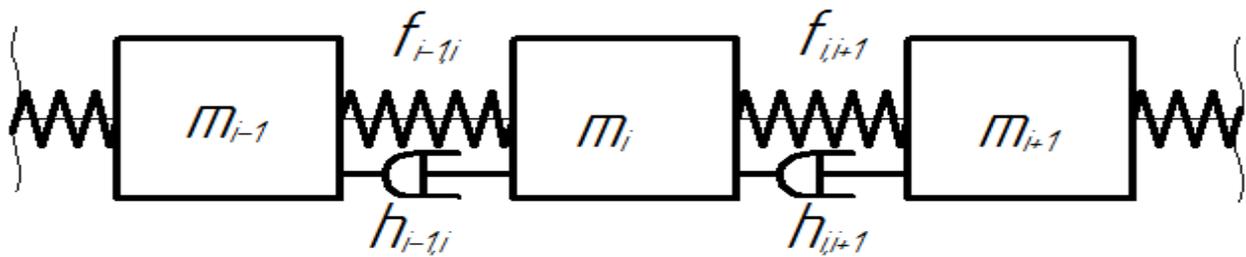


Рис. 5. Линейная динамическая система

Уравнение для m_i -ой массы будет иметь вид:

$$m_i \ddot{x}_i + h_{i-1,i}(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) - h_{i,i+1}(\dot{x}_{i+1,i} - \dot{x}_i) + f_{i-1,i}(x_i - x_{i-1}) - f_{i+1,i}(x_{i+1,i} - x_i) = P_i(t),$$

где $h_{n,m}(\dot{x}_n - \dot{x}_m)$ - нелинейная функция демпфирования, $f_{k,l}(x_k - x_l)$ - нелинейная функция упругости.

Частным случаем многомассовой системы является двухмассовая система (рис.6), совершающая движение по неровностям, описываемые уравнением $s(t) = x_0 \sin \omega t$. Здесь частота ω зависит от скорости движения системы, x_0 - высота неровностей. Для удобства понимания и расчётов колебательных процессов перейдем от кинематического воздействия к динамическому. Возмущение со стороны дороги передается через пружину c_1 с амплитудой x_0 :

$$x_0 c_1 \sin \omega t = F_0 \sin \omega t$$

Таким образом, дифференциальные уравнения двухмассовой линейной системы принимают вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + h \dot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - h \dot{x}_2 - c_2 x_2 = F_0 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - h \dot{x}_1 - c_2 x_1 + h \dot{x}_2 + c_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

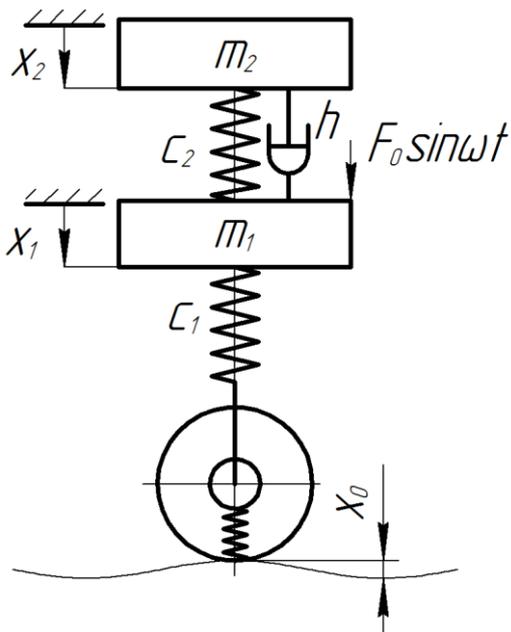


Рис. 6. Модель двухмассовой системы

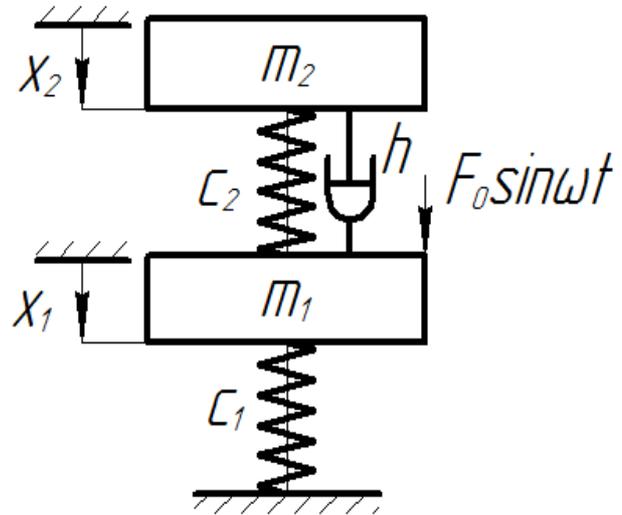


Рис. 7. Расчетная схема

Для построения АЧХ в программе математического моделирования Matlab Simulink созданы математические модели линейной и нелинейной двухмассовых систем. Заменяем движущуюся двухмассовую систему (рис.6) на расчетную схему, представленную на рис.7.

В качестве математического описания линейной модели выступает приведенная выше система дифференциальных уравнений с демпфером:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + h \dot{x}_1 + (c_1 + c_2)x_1 - h \dot{x}_2 - c_2 x_2 = F_0 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 - h \dot{x}_1 - c_2 x_1 + h \dot{x}_2 + c_2 x_2 = 0 \end{cases},$$

где m_1 и m_2 – подрессоренные массы тележки и сиденья, h - вязкость демпфера, c_1 и c_2 – жесткости пружин, x_1 и x_2 - координаты перемещений грузов. Выражаем из системы вторые производные координат перемещений и строим математическую модель (рис.8):

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{(F_0 \sin \omega t - h \dot{x}_1 - (c_1 + c_2)x_1 + h \dot{x}_2 + c_2 x_2)}{m_1}; \\ \ddot{x}_2 = \frac{h \dot{x}_1 + c_2 x_1 - h \dot{x}_2 - c_2 x_2}{m_2} \end{cases}$$

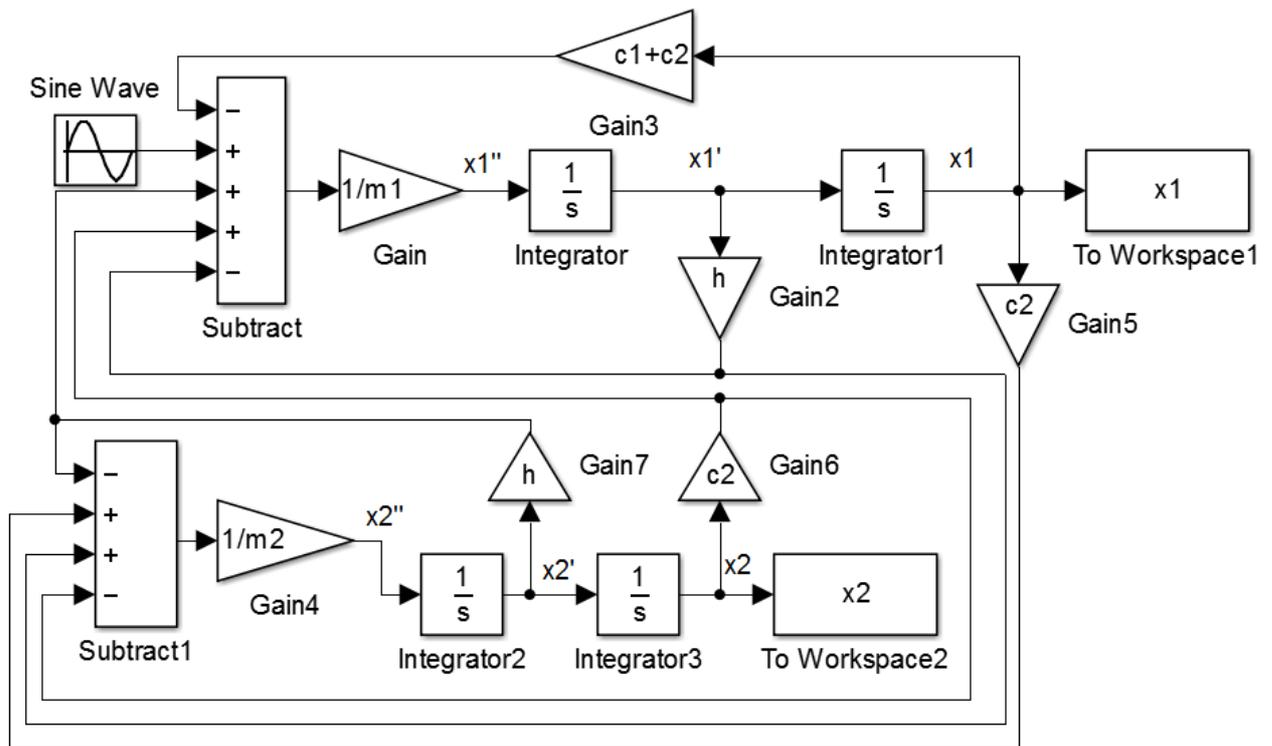


Рис. 8. Двухмассовая линейная модель

Для построения модели используем блок Integrator, в параметрах которого записываем начальные условия (для нашего случая принимаем начальные условия равные нулю). На вход в Integrator поступают вторые и первые производные от перемещений, на выходе получаем первые производные и сами перемещения. Блок Gain («Усилитель») играет роль коэффициента. Коэффициенты и частоты вводятся через отдельный m-файл, служащим файлом начальных данных.

Parameters	
Sine type:	Time based
Time (t):	Use simulation time
Amplitude:	P
Bias:	0
Frequency (rad/sec):	w
Phase (rad):	0
Sample time:	0
<input checked="" type="checkbox"/> Interpret vector parameters as 1-D	

Рис. 9. Параметры системы

В качестве возмущающей силы F используем блок Sine Wave, параметрами которого являются амплитуда возмущения P и циклическая частота ω . Окно параметров этого блока представлено на *рис.9*. В блоке Subtract происходит вычитание и сложение поступающих на вход данных.

Блок To Workspace является выводным блоком на рабочее пространство Matlab из пространства Simulink. В нашем случае выводится массив координат перемещений. Массив обрабатывается, определяются амплитуды колебаний для каждой частоты, по которым строится

АЧХ. Амплитудно-частотная характеристика линейных колебаний $A(\omega)$ представлена на *рис.10*. На графике видно два ярко выраженных резонанса - в фазе и противофазе.

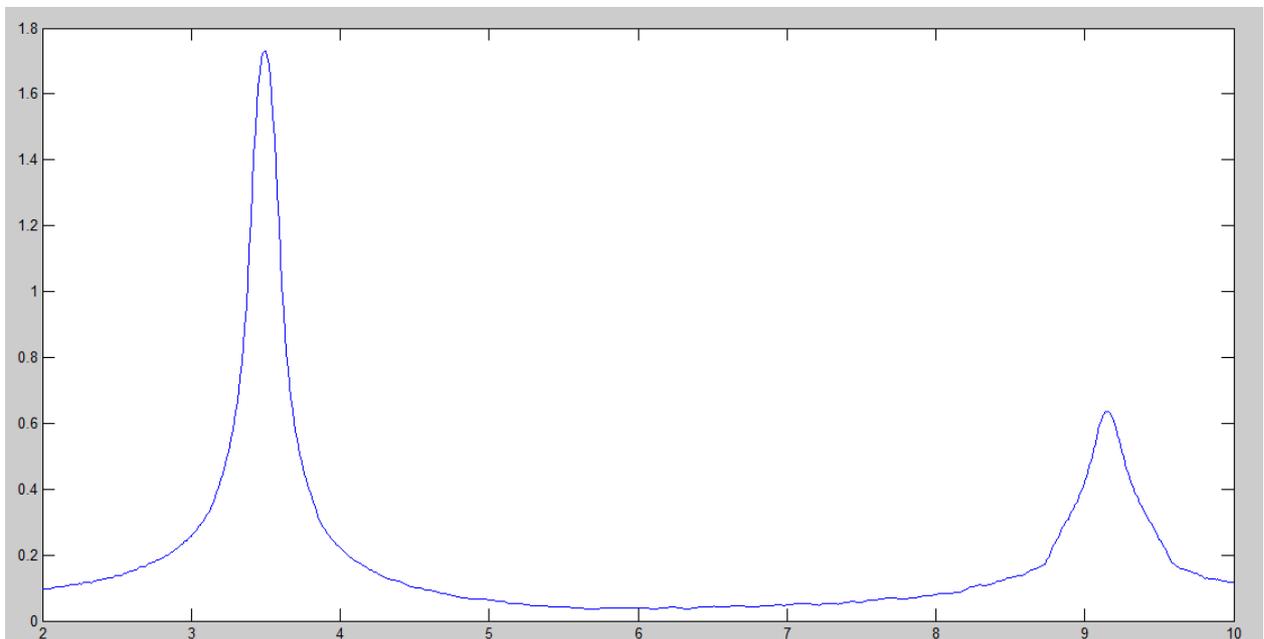


Рис. 10. Амплитудно-частотная характеристика линейных колебаний

Теперь введем нелинейность в нашу модель. Нелинейными будут выступать перемещения грузов. Система дифференциальных уравнений колебаний примет вид:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + h \dot{x}_1 + (c_1 + c_2)(x_1 + \gamma_1 x_1^3) - h \dot{x}_2 - c_2 (x_2 + \gamma_2 x_2^3) = F_0 \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 - h \dot{x}_1 - c_2 (x_1 + \gamma_1 x_1^3) + h \dot{x}_2 + c_2 (x_2 + \gamma_2 x_2^3) = 0 \end{cases} - c$$

жесткой характеристикой

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + h \dot{x}_1 + (c_1 + c_2)(x_1 - \gamma_1 x_1^3) - h \dot{x}_2 - c_2 (x_2 + \gamma_2 x_2^3) = F_0 \sin \omega t; \\ m_2 \ddot{x}_2 - h \dot{x}_1 - c_2 (x_1 - \gamma_1 x_1^3) + h \dot{x}_2 + c_2 (x_2 + \gamma_2 x_2^3) = 0 \end{cases} - c$$

мягкой характеристикой

По аналогии с линейной создается нелинейная математическая модель (рис. 11).

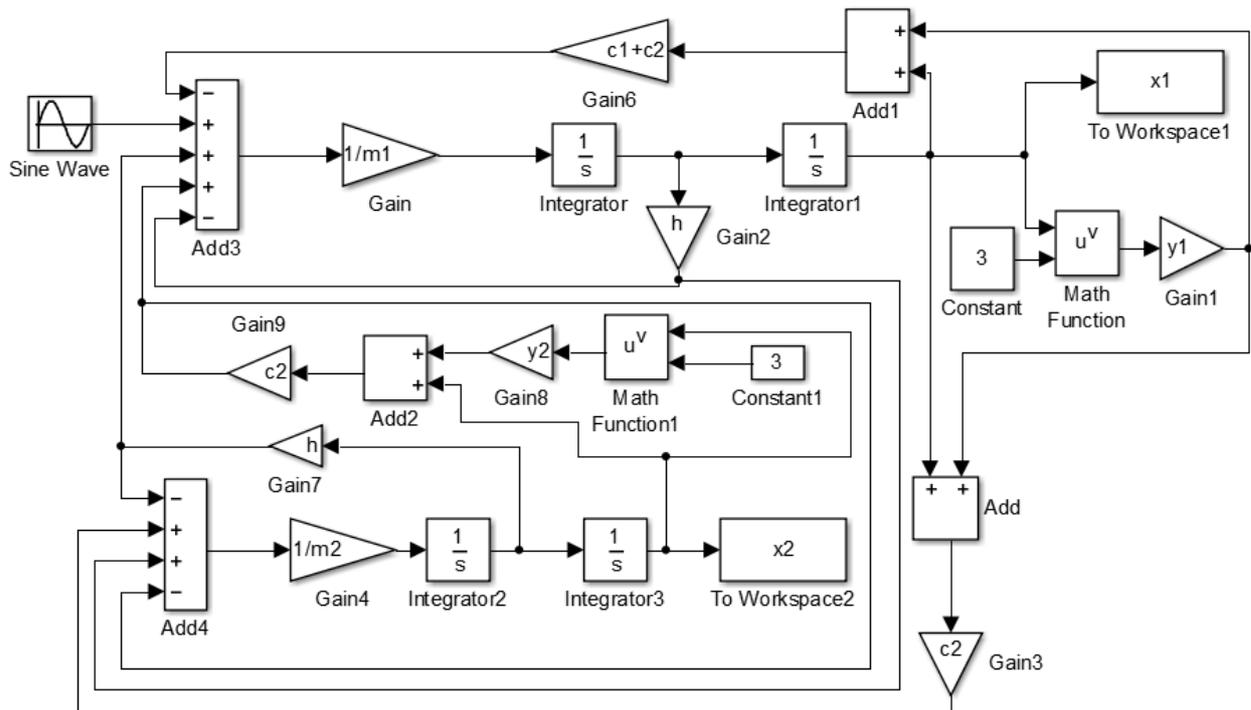


Рис. 11. Двухмассовая нелинейная модель

Новым компонентом является блок Math Function, который добавляет нелинейность в модель. Нелинейная АЧХ строится по аналогичному алгоритму, что и линейная характеристика. На рис.12 и рис.13 представлены мягкая и жесткая АЧХ соответственно, с использованием тех же начальных параметров, что и для линейной характеристики.

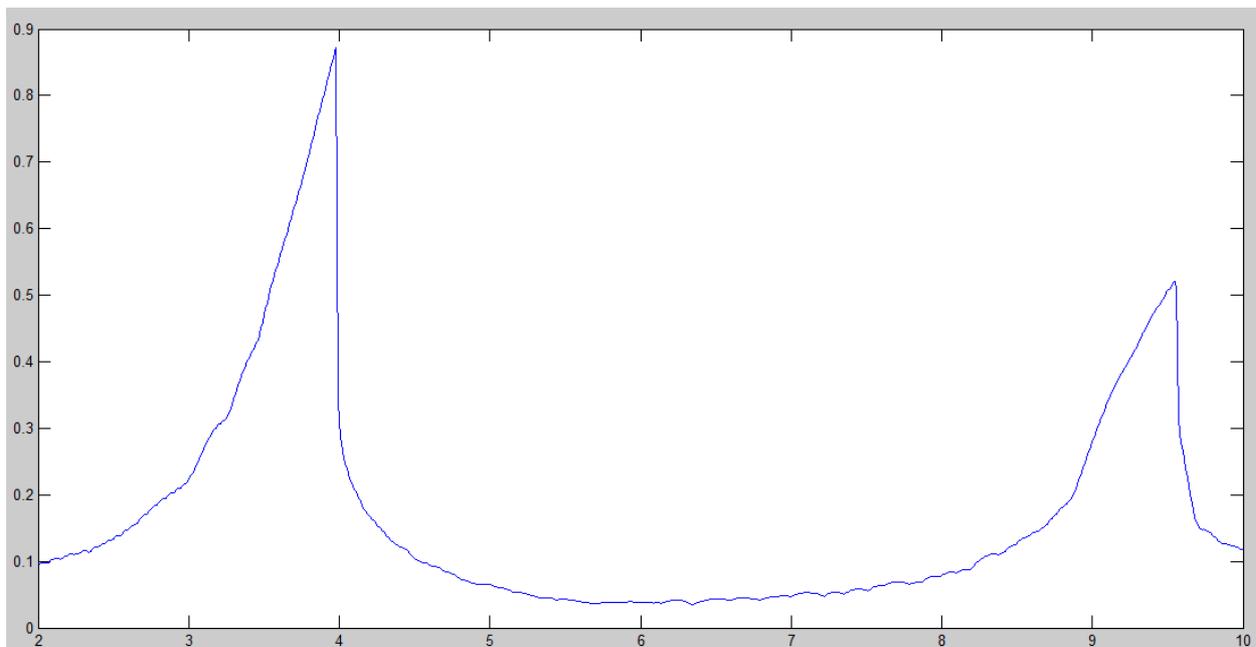


Рис. 12. Жесткая амплитудно-частотная характеристика нелинейных колебаний двухмассовой модели

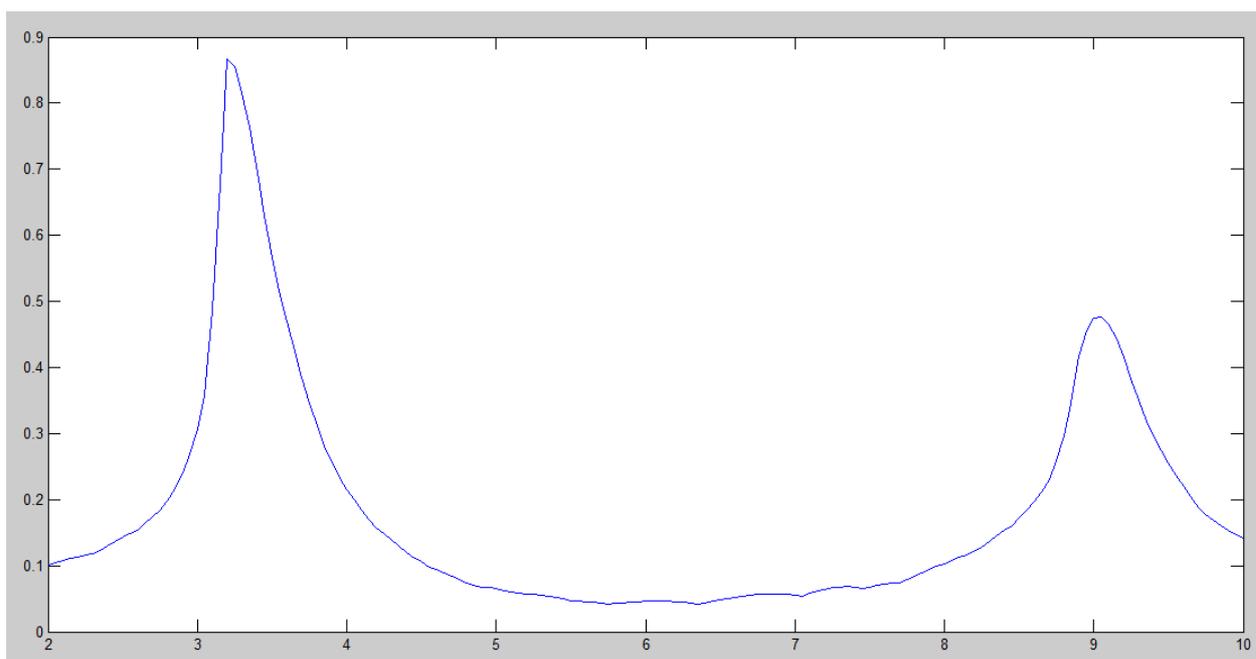


Рис. 13. Мягкая амплитудно-частотная характеристика нелинейных колебаний двухмассовой модели

Благодаря вводу нелинейности в систему, возможно добиться уменьшения резонансных амплитуд почти в два раза. Кроме того нелинейность играет роль гасителя

колебаний, в результате срыва колебаний: для мягкой характеристики при повышении частоты вынужденных колебаний, для жесткой – при понижении.

Полученные нами выводы можно применить на практике. Данную двухмассовую нелинейную систему можно интегрировать в опорно-поддрессоривающую конструкцию для перевозки ценных хрупких грузов. На прицепное звено с нелинейной подвеской, совершающее поступательное движение по дороге, действует возмущающая сила при наезде на неровности. На прицепе размещена нелинейно поддрессоренная опора, на которой и располагается перевозимый объект.

Список литературы

1. Каудерер Г. Нелинейная механика. М.: Издательство иностранной литературы, 1961. 777 с.
2. Петров И.П., Петухов А.И. Колебания нелинейных систем и построение их амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) // Молодёжный научно-технический вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 9. Режим доступа: <http://sntbul.bmstu.ru/doc/618362.html> (дата обращения 30.03.2014).
3. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. М.: Машиностроение, 1972. 392с.
4. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1972. 416 с.
5. Дьяконов В. П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. М.: ДМКПресс, 2008. 784 с.
6. Дьяконов В. П. MATLAB 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. М.: СОЛОН-Пресс, 2005. 800 с.