

Об одном классе оптимальных нелинейных двоичных последовательностей

04, апрель 2014

DOI: 10.7463/0414.0704644

Юдачев С. С.

УДК 621.396.4

Россия, МГТУ им. Баумана

judachev@gmail.com

Введение

Одной из существенных тенденций современной беспроводной радиоэлектроники новых поколений является применение принципов широкополосной передачи, обладающей целым рядом общепризнанных достоинств [1,2]. Эти принципы используют при построении современных и перспективных связных, радиолокационных, радионавигационных и измерительных систем. Проектирование таких систем невозможно без поиска новых методов синтеза широкополосных сигналов, основанных, в частности, на использовании кодовых двоичных последовательностей со специфическими корреляционными свойствами. При этом наряду с задачей исследования теоретических аспектов существования новых семейств сигналов, важна также и проработка технологических вопросов их практического генерирования и обработки.

Работа посвящена исследованию одного из классов нелинейных кодовых двоичных последовательностей, оптимальных в смысле границ упаковки, идея создания которых впервые предложена Б.Ж. Камалетдиновым [3]. Эти последовательности выгодно отличаются от известных большим разнообразием способов формирования тонкой структуры кода и представительным набором длин. Математическая теория синтеза таких последовательностей проработана достаточно глубоко [3,4], но вопросам разработки алгоритмов практического формирования и исследованию свойств на основе современного программного обеспечения внимания уделено недостаточно, что затрудняет оценку возможностей их практического использования и те преимущества, которые они могут обеспечить при проектировании перспективных широкополосных систем.

Целью работы являлась разработка практических алгоритмов и программ на их основе, позволяющих формировать два подкласса ансамблей бинарных последовательно-

стей Камалетдинова различных длин и оценивать их основные свойства.

1. Метод построения последовательностей

Взаимокорреляционные функции последовательностей Камалетдинова удовлетворяют нижней границе Велча для семейств бинарных последовательностей [5]:

$$u_{max} \geq u_{zp} = \left\lceil \left(L^2 \cdot \frac{L-1}{VL-1} \right)^{1/2} \right\rceil_L, \quad (1)$$

где $\lceil x \rceil_L$ – ближайшее к x целое, не превышающее x и совпадающее по четности с L , u_{max} – модуль максимального бокового выброса корреляционной функции, u_{zp} – граничное значение модуля максимального бокового выброса корреляционной функции, V – объем ансамбля последовательностей, L – длина последовательности. Выражение (1) применимо к последовательностям с объемом ансамбля меньшим $L/2$.

Длина последовательности – это составное число вида

$$L = p \cdot (p - 1), \quad (2)$$

где p – любое простое целое число, удовлетворяющее условиям $p \equiv 3 \pmod{4}$ и $p > 3$.

Пусть Q_r – множество натуральных чисел от 0 до $r - 1$. Положим, что $\{b_{h,j} : j \in Q_{p-1}, h \in Q_V\}$ – совокупность V последовательностей символов p -ичного алфавита, $b_{h,j} : j \in Q_p$, представляющих каждому из уравнений

$$b_{h,j} = b_{t,j+n} + l \pmod{p} \quad (3)$$

не более двух решений относительно $j \in Q_{p-1}$ при любой комбинации параметров $h, t \in Q_V$, $n \in Q_{p-1}$, $l \in Q_p$, за исключением случая $h = t$, $n = 0 \pmod{p-1}$, $l = 0 \pmod{p}$.

Наконец, пусть бинарная последовательность $\{\varphi(i) : i \in Q_p\}$ периода p удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=0}^{p-1} \varphi(i) \varphi(i+r) = \begin{cases} -1, & r \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ p, & r \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \quad (4)$$

Новое множество последовательностей $\{a_{h,i} : h \in Q_V, i \in Q_N\}$ для L , удовлетворяющего (2), определяется как

$$a_{h,i} = \varphi(i + b_{h,i}), \quad (5)$$

где последовательности $\{b_{h,i}\}$ и $\varphi(\cdot)$, удовлетворяют выражениям (3) и (4), соответственно. Можно показать, что при $p + 1 + 2 < p(p - 1)$ максимальный корреляционный пик u_{max} семейства (5) достигает величины

$$u_{max} = p + 1 + 2 = p + 3. \quad (6)$$

Данное выражение можно использовать для проверки сформированных последовательностей.

Уравнение (5) открывает новые возможности для построения ансамблей бинарных последовательностей, обладающих параметром u_{max} порядка $(1/L)^{1/2}$. Для его реализации необходимы последовательности $\{\varphi(i)\}$ и $\{b_{h,j}\}$, наделенные вышеперечисленными свой-

ствами. Последовательности $\{\varphi(i)\}$ в соответствии с (4) можно построить на основе разностных множеств Адамара. Известно достаточно много таких последовательностей - это М-последовательности, последовательности GMW, Якоби, Холла и ряд других [1]. Замена последовательностей приводит к изменению тонкой структуры кода, не оказывая влияния на параметры множеств (5). Более сложна процедура выбора семейства $\{b_{h,j}\}$, удовлетворяющего (3), успех построения ансамблей множества (5) в основном и определяется умением формировать $\{b_{h,j}\}$. При этом необходимо максимизировать количество последовательностей $\{b_{h,j}\}$, что и определит мощность семейства (5). Данный подход достаточно эффективен и позволяет получить множества бинарных последовательностей, оптимальных по критерию минимума корреляционного параметра u_{max} .

Пусть p простое целое число, удовлетворяющее условию (2) и пусть α – примитивный элемент поля Галуа $GF(p)$. Два подкласса последовательностей - N и Di-последовательности формируются следующим образом:

N-последовательности. Пусть $V = p + 1$ последовательностей $\{b_{h,j}\}$, $p > 3$, периода $p - 1$ строятся согласно алгоритму:

$$\begin{aligned} b_{h,j} &= \alpha^{j+h} + \alpha^{-j}, \quad j \in Q_{p-1}, \quad h \in Q_{p-1}, \\ b_{p,j} &= \alpha^j, \quad j \in Q_{p-1}, \\ b_{p+1,j} &= \alpha^{-j}, \quad j \in Q_{p-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Семейство (5), правило кодирования которого имеет вид

$$\begin{aligned} a_{h,i} &= \varphi(i + \alpha^{i+h} + \alpha^{-i}), \quad i \in Q_{p(p-1)}, \quad h \in Q_{p-1}, \\ a_{p,i} &= \varphi(i + \alpha^i), \quad i \in Q_{p(p-1)}, \\ a_{p+1,i} &= \varphi(i + \alpha^{-i}), \quad i \in Q_{p(p-1)}, \end{aligned} \quad (8)$$

будет иметь показатели

$$L = p(p-1), V = p+1, u_{max} = p+3. \quad (9)$$

Di-последовательности. В этом случае $V = p$ последовательностей $\{b_{h,j}\}$, $p > 3$, длины $p - 1$ формируются как

$$\begin{aligned} b_{h,j} &= \alpha^{2j+h} + \alpha^j, \quad j \in Q_{p-1}, \quad h \in Q_{p-1}, \\ b_{p,j} &= \alpha^j, \quad j \in Q_{p-1}, \end{aligned} \quad (10)$$

а правило построения $\{a_{h,i}\}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} a_{h,i} &= \varphi(i + \alpha^{2i+h} + \alpha^i), \quad i \in Q_{p(p-1)}, \quad h \in Q_{p-1}, \\ a_{p,i} &= \varphi(i + \alpha^i), \quad i \in Q_{p(p-1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Основные показатели семейства последовательностей (11) определяются выражениями

$$L = p(p-1), V = p, u_{max} = p+3. \quad (12)$$

2. Алгоритм и программа

Разрабатываемая программа основана на следующем алгоритме формирования N и Di-последовательностей.

- 1) Выбор положительного простого целого $p > 3$ и $p = 3 \pmod{4}$;
- 2) нахождение примитивного элемента α поля $GF(p)$;
- 3) позиция символа $i = \{0, 1, \dots, p-1\}$ трактуется как элемент поля $GF(p)$;
- 4) формирование последовательностей $\{\alpha^i\}$, $\{\alpha^{-i}\}$, необходимых для построения N-последовательностей, а также последовательности $\{\alpha^{2i}\}$, необходимой для построения Di-последовательностей. Возведение в степень $\{\alpha^i\}$, $\{\alpha^{-i}\}$, $\{\alpha^{2i}\}$ производится по модулю p ;
- 5) суммирование по модулю p циклически повторяющихся копий последовательностей $\{i\}$, $\{\alpha^{i+h}\}$ и $\{\alpha^{-i}\}$ в соответствии с (7) для N-последовательностей, где $\{\alpha^{i+h}\}$ представляет собой циклический сдвиг $\{\alpha^i\}$ на h элементов, и h – номер последовательности в ансамбле. Длина всех участвующих в суммировании последовательностей равна $p \cdot (p-1)$;
- 6) суммирование по модулю p циклически повторяющихся копий последовательностей $\{i\}$, $\{\alpha^{2i+h}\}$ и $\{\alpha^i\}$ в соответствии с (10) для Di-последовательностей, где $\{\alpha^{2i+h}\}$ представляет собой циклический сдвиг $\{\alpha^{2i}\}$ на h элементов, и h – номер последовательности в ансамбле. Длина всех участвующих в суммировании последовательностей равна длине последовательности Камалетдинова, то есть $p \cdot (p-1)$;
- 7) полученные ансамбли p -ичных N и Di-последовательностей отображаются на бинарный алфавит. с помощью двузначного характера функции $\psi(x)$, представляющей собой отображение поля $GF(p)$ на пару вещественных чисел $\{+1, -1\}$, преобразующей ненулевой элемент x в $+1$, если его логарифм четен, и в -1 в противном случае. Необходимо отметить, что $\psi(0) = \psi(1) = 1$.

Двузначный характер $\psi(x)$ ненулевого элемента x для полей нечетного порядка

($p > 2$) определяется как

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \log_{\alpha} x = 0 \pmod{2} \\ -1, \log_{\alpha} x \neq 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad (13)$$

В качестве примера рассмотрим формирование первых ($h = 1$) N и Di-последовательностей при $p = 7$. Длина последовательностей составит $L = p \cdot (p-1) = 42$ элемента, а примитивный элемент поля $GF(7)$ равен $\alpha = 3$. Необходимые для формирования N-последовательности вспомогательные последовательности имеют вид

$$\begin{aligned} i &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, 2, \dots\}, \\ \alpha^{i+1} &= \{3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, \dots\}, \\ \alpha^{-i} &= \{1, 5, 4, 6, 2, 3, 1, 5, 4, \dots\}. \end{aligned}$$

При поэлементном сложении по модулю 7 этих вспомогательных последовательностей получим искомую N-последовательность

$$K_{N11} = \{4, 1, 5, 6, 4, 2, 3, 0, 4, 5, 3, 1, 2, 6, 3, 4, 2, 0, 1, 5, 2, 3, 1, \\ 6, 0, 4, 1, 2, 0, 5, 6, 3, 0, 1, 6, 4, 5, 2, 6, 0, 5, 3\}.$$

K_{N11} отображается на бинарный алфавит по правилу (13). Так как $\psi(0) = \psi(1) = \psi(2) = \psi(4) = 1$ и $\psi(3) = \psi(5) = \psi(6) = -1$, получим

$$K_{N1} = \{1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, \\ -1, 1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, -1\}.$$

В конечном итоге, в результате замены «-1» на «1» и «1» на «0» получим искомую бинарную последовательность

$$K_{N1} = 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, \\ 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1\}.$$

Формирование Di-последовательности:

$$i = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, 2, \dots\},$$

$$\alpha^i = \{1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, \dots\},$$

$$\alpha^{2i+1} = \{3, 6, 5, 3, 6, 5, 3, 6, 5, \dots\}.$$

При поэлементном сложении этих вспомогательных последовательностей после преобразования получим искомую Di-последовательность

$$K_{Di11} = \{4, 3, 2, 5, 0, 1, 3, 2, 1, 4, 6, 0, 2, 1, 0, 3, 5, 6, 1, \\ 0, 6, 2, 4, 5, 0, 6, 5, 1, 3, 4, 6, 5, 4, 0, 2, 3, 5, 4, 3, 6, 1, 2\}.$$

$$K_{Di1} = \{0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, \\ 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0\}.$$

Были сформированы последовательности длиной до 2162 элементов и исследованы их свойства, ($L = 110; 342; 506; 930, 1806, 2162$). В табл.1 приведена краткая сводка параметров этих последовательностей.

Таблица 1. Параметры изучаемых ансамблей N и Di последовательностей

N-последовательности			Di-последовательности		
p	L	V	p	L	V
11	110	12	11	110	11
19	342	20	19	342	19
23	506	24	23	506	23
31	930	32	31	930	31
43	1806	44	43	1806	43
47	2162	48	47	2162	47

Исследуемые последовательности предназначены для широкополосных систем, которые могут работать как в синхронном, так и в асинхронном режимах при воздействии структурных (внутрисистемных и внешних) помех. Для вывода о возможности их практического использования в этих режимах и оценки помехоустойчивости систем необходимо знание корреляционных функций и следующих характеристик [1,6].

- 1) Периодическая автокорреляционная функция (ПАКФ), определяемая ем $R_{\text{ПАКФ}}(k) = \sum_{i=1}^L a_i \cdot a_{i-k}$, сдвиг k является *циклическим*.
- 2) Аперриодическая автокорреляционная функция (ААКФ), определяемая также, как ПАКФ, за исключением того, что сдвиг k – ациклический.
- 3) Периодическая взаимокорреляционная функция (ПВКФ), определяемая выражением $R(k) = \sum_{i=1}^L a_i \cdot b_{i-k}$, сдвиг k – циклический.
- 4) Аперриодическая взаимокорреляционная функция (АВКФ), определяемая также как ПВКФ, но сдвиг k – ациклический.

Здесь $a = \{a_1, a_2, \dots, a_L\}$ и $b = \{b_1, b_2, \dots, b_L\}$ – двоичные последовательности символов, L – длина последовательности, k – значение текущего сдвига.

Удобным инструментом для точной оценки корреляционных свойств является вычисление следующих статистических характеристик корреляционных функций [6].

- 1) Значение максимального положительного бокового выброса КФ $u_{\delta \max}$;
- 2) количество максимальных положительных боковых выбросов $N_{\delta \max \delta}$;
- 3) значение максимального отрицательного бокового выброса КФ ;
- 4) количество максимальных отрицательных боковых выбросов ;
- 5) математическое ожидание модуля боковых выбросов $m(|u_{\delta}|)$;
- 6) математическое ожидание боковых выбросов $m(u_{\delta})$;
- 7) среднеквадратическое отклонение модуля боковых выбросов $\sigma(|u_{\delta}|)$;
- 8) среднеквадратическое отклонение боковых выбросов $\sigma(u_{\delta})$;
- 9) максимальный нормированный уровень выбросов (боковых для АКФ)

$$\chi_{\max} = \frac{(|u_{\delta \max}|, |u_{\delta \min}|)_{\max}}{L} \cdot 100\%,$$

где запись $(x, y)_{\max}$ означает выбор наибольшего значения из x и y ;

- 10) средний нормированный уровень выбросов (боковых для АКФ)

$$\chi_{\text{ср}} = \frac{m(|u_{\delta}|)}{L} \cdot 100\%;$$

- 11) сбалансированность.

Исследование характеристик двоичных последовательностей носит весьма трудоемкий характер. К примеру, для вычисления одного элемента N или D_i последовательностей, согласно приведенному алгоритму, необходимо выполнить 7 операций. Построение графиков корреляционных функций является также достаточно трудоемкой и рутинной задачей. Поэтому, когда требуется формировать ансамбли из нескольких последовательностей, имеющих длину несколько сотен и более элементов, а также наглядно оценить их основные характеристики, очевидной становится необходимость использования специального программного обеспечения для упрощения решения данной задачи.

Для этого была разработана программа, названная «Generator PRS», на языке высокого уровня C#. В качестве среды разработки программного обеспечения был выбран Microsoft Visual Studio 2010 Professional, предоставляющий широкие функциональные возможности. Выбор языка программирования C# в качестве базисного обусловлен необходимостью разработки не только программного алгоритма, но и пользовательского графиче-

ческого интерфейса для работы с программой. Для этой задачи хорошо подходит интерфейс программирования приложений под названием «Windows Forms», в котором наиболее удобно работать с языком C#. В программном проекте выделяют следующие основные компоненты:

- 1) «Program.cs»;
- 2) «Form1.cs»;
- 3) «Form3.cs»;
- 4) «Form5.cs».

Файл «Program.cs» содержит два основных класса: *Galois*, и *Program*. В классе *Galois* содержится код для методов и членов класса, с помощью которых реализуется работа с N и Di-последовательностями. Процедуры «WriteArrayKamaletdinov» и «WriteArrayKamaletdinov_Di» используются для нахождения и записи в массив N-последовательностей и Di-последовательностей, соответственно. Процедуры «CalcPAKF», «CalcPVKF», «CalcAAKF» и «CalcAVKF» используются для расчета корреляционных функций N-последовательностей. Процедуры с аналогичными названиями, только с приставкой «D», применяются для вычисления корреляционных функций Di-последовательностей «CalcAAKF_B» и «CalcAVKF_B». Разумеется, здесь описывается только часть используемых в программе функций и процедур.

На рис. 1 приведено основное окно программы «Generator PRS». В верхней части окна находятся две основные вкладки: «N-последовательности Камалетдинова», «Di-последовательности Камалетдинова». Каждая вкладка содержит одинаковый набор кнопок и полей ввода данных. Рассмотрим работу с программой на примере вкладки «N-последовательности» (рис. 1). Самое крупное верхнее поле используется для вывода требуемой информации, например, конкретной последовательности из ансамбля. В блоке «Вывод последовательностей» содержатся два поля для ввода цифр. Верхнее необходимо для ввода параметра, определяющего длину формируемой последовательности (в данном случае – число p), нижнее предназначено для ввода номера последовательности из ансамбля, которую мы желаем получить. При нажатии кнопки «Вывести последовательность» при корректно введенных числовых данных в верхнем поле получаем искомую последовательность, а также количество нулей и единиц в последовательности (на рис. 1 показан пример вывода 3-ей последовательности из ансамбля N-последовательностей при $p = 7$). Чтобы вывести полный ансамбль последовательностей какой-либо длины, надо ввести параметр p и нажать кнопку «Вывести все последовательности». При этом для отображения последовательностей появляется дополнительное окно, программный код которого содержится в «Form3.cs».

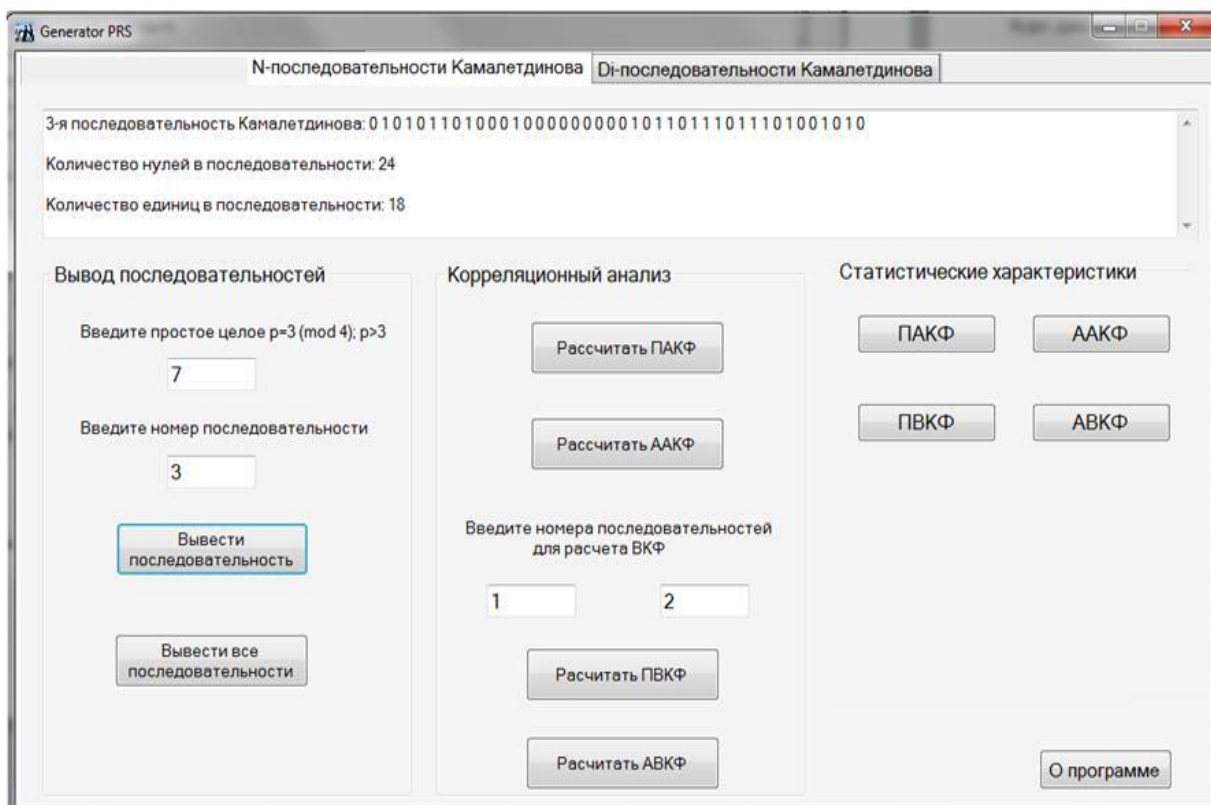


Рис. 1. Основное окно программы «Generator PRS»

В блоке «Корреляционный анализ» расположены два поля для ввода номеров последовательностей, для которых необходимо вычислить взаимокорреляционные функции, а также следующие 4 кнопки:

- 1) «Рассчитать ПАКФ» – вывод графика периодической автокорреляционной функции той последовательности, номер которой вводится в блоке «Вывод последовательностей»;
- 2) «Рассчитать ААКФ» – вывод графика аperiodической функции автокорреляции той последовательности, номер которой вводится в блоке «Вывод последовательностей»;
- 3) «Рассчитать ПВКФ» – вывод графика периодической функции взаимной корреляции. 4) «Рассчитать АВКФ» – вывод графика аperiodической функции.

При нажатии на любую из указанных кнопок в поле вывода появляются значения КФ, а также статистические характеристики данной КФ. График исследуемой корреляционной функции появляется в дополнительном окне, за оформление которого отвечает форма «Form5.cs». Для построения графиков используется достаточно удобная библиотека «ZedGraph.dll».

В блоке «Статистические характеристики» расположены четыре кнопки: «ПАКФ», «ААКФ», «ПВКФ» и «АВКФ». Если ввести необходимые исходные данные и нажать на

какую-либо из этих кнопок, появится таблица статистических характеристик, описывающая поведение соответствующих корреляционных функций всего ансамбля рассматриваемой длины. Код программы здесь полностью соответствует алгоритмам формирования N и Di-последовательностей приведенным выше.

3. Корреляционные свойства и статистические характеристики N и Di последовательностей

Рассматривались алгоритмы формирования и были подробно рассчитаны статистические характеристики двух семейств N и Di-последовательностей. По три первых образца последовательностей из каждого исследуемого ансамбля длины $L=342$ приведены в Приложении. Далее в тексте нумерация последовательностей совпадает с нумерацией в программе «Generator PRS». В качестве иллюстраций во избежание чрезмерного возрастания объема работы приводятся только некоторые наиболее характерные корреляционные функции и рассматриваются наиболее примечательные характеристики N и Di-последовательностей.

Среди ансамбля N-последовательностей для $L = 110$ выделяются последовательности с номерами 11 и 12. Они имеют наилучшие характеристики ПАКФ среди всего ансамбля, причем ПАКФ принимает два значения (помимо основного выброса) – 2 и –10. Математическое ожидание модуля боковых выбросов $m(|u_{\delta}|)$ равно 10,7 или 10,9 для последовательностей с 1-ой по 10-ую, а для 11-ой и 12-ой $m(|u_{\delta}|) = 3,4$; СКО модуля боковых выбросов $\sigma(|u_{\delta}|) = 3,1$; 3,3 для последовательностей с 1-ой по 10-ую, а для 11-ой и 12-ой $\sigma(|u_{\delta}|) = 3,0$. Математическое ожидание боковых выбросов $m(u_{\delta}) = -0,1$ для всех последовательностей; СКО $\sigma(u_{\delta}) = 11,2$; 11,4. Для 11-ой и 12-ой последовательностей $\sigma(u_{\delta}) = 9,1$. Максимальный уровень боковых лепестков $\chi_{max} = 12,7$ % от центрального пика ($\chi_{max} = 9,1$ – для 11-ой и 12-ой). Средний уровень боковых лепестков $\chi_{cp} = 9,8$; 9,9 % от центрального пика ($\chi_{cp} = 3,1$ % – для 11-ой и 12-ой последовательностей).

Периодические взаимокорреляционные функции ансамбля имеют следующие характеристики: $m(|u_{\delta}|) = (8,9 \div 10,9)$, $\sigma(|u_{\delta}|) = (3,4 \div 4,7)$, $m(u_{\delta}) = 0,8$; 1,0 и $\sigma(u_{\delta}) = (10,0 \div 11,4)$. Максимальный уровень выбросов составляет $\chi_{max} = 12,7$ % от L , а средний уровень ограничен величинами $\chi_{cp} = (8,1 \div 9,9)$ % от L . Максимальное значение (за исключением основного пика) выбросов периодических АКФ и ВКФ ограничивается числом $p + 3 = 14$, что согласуется с приведенными ранее утверждениями.

Нижняя и верхняя границы упаковки аperiodических АКФ N-последовательностей длины 110 элементов принимают значения – 24 и 22, соответственно. Каждая ААКФ ансамбля содержит 2÷6 максимальных положительных неосновных выбросов и 2÷6 максимальных отрицательных. Математическое ожидание выбросов равно нулю, а СКО выбросов лежит в пределах $\sigma(u_{\delta}) = (4,8 \div 8,8)$. Модули боковых выбросов в ААКФ характеризуются разбросом $\sigma(|u_{\delta}|) = (3,2 \div 5,2)$ и математическим ожиданием $m(|u_{\delta}|) = (3,6 \div 7,1)$. Величины нормированных уровней определяются значениями $\chi_{max} = (12,7 \div$

21,8) % и $\chi_{cp} = (3,2 \div 6,5)$ % от величины центрального пика. Наилучшими харак-

теристиками ААКФ также обладают 11-ая и 12-ая последовательности.

Для ансамбля N-последовательностей длины $L = 342$ $p = 19$ и $V = 20$. При такой длине последовательности уже можно наглядно оценить основные закономерности и сравнить их с теоретическими. Исследования последовательностей большей длины показали, что указанные закономерности сохраняются, поэтому результаты здесь не приводятся.

Вид трехуровневых периодических АКФ и ВКФ определяют значения -18 ; 2 и 22 .

ПАКФ восемнадцати последовательностей ансамбля имеют следующие статистические характеристики:

$m(|u_{\delta}|) = (18,9 \div 19,0)$; $\sigma(|u_{\delta}|) = (4,2 \div 4,4)$; $m(u_{\delta}) = -0,1$; $\sigma(u_{\delta}) = 19,4$; $\chi_{max} = 6,4\%$ от L ; $\chi_{cp} = 5,5\%$ от L .

Две оставшиеся последовательности под номерами 19 и 20, выделяются на фоне общей картины. Последовательности под номерами 19 и 20 имеют двухуровневую структуру со значениями -18 и 2 и обладают следующими характеристиками:

$m(|u_{\delta}|) = 3,6$; $\sigma(|u_{\delta}|) = 4,9$; $\sigma(|u_{\delta}|) = 4,9$; $m(u_{\delta}) = -0,1$; $\sigma(u_{\delta}) = 6,1$; $\chi_{max} = 5,3\%$ от L ; $\chi_{cp} = 1,1\%$ от L .

Трехуровневые периодические взаимокорреляционные функции имеют низкие значения уровней $\chi_{max} = 6,4\%$ и $\chi_{cp} = (4,9 \div 5,5)\%$ от длины последовательности. Модули выбросов обладают параметрами: $m(|u_{\delta}|) = (16,7 \div 18,9)$ и $\sigma(|u_{\delta}|) = (4,4 \div 7,0)$. Математическое ожидание выбросов для большинства последовательностей равно $m(u_{\delta}) = 1,0$, СКО выбросов $\sigma(u_{\delta}) = (18,1 \div 19,4)$. На рис. 2 представлена ПВКФ 2-ой и 17-ой последовательностей, у которой $\chi_{cp} = 4,9\%$.

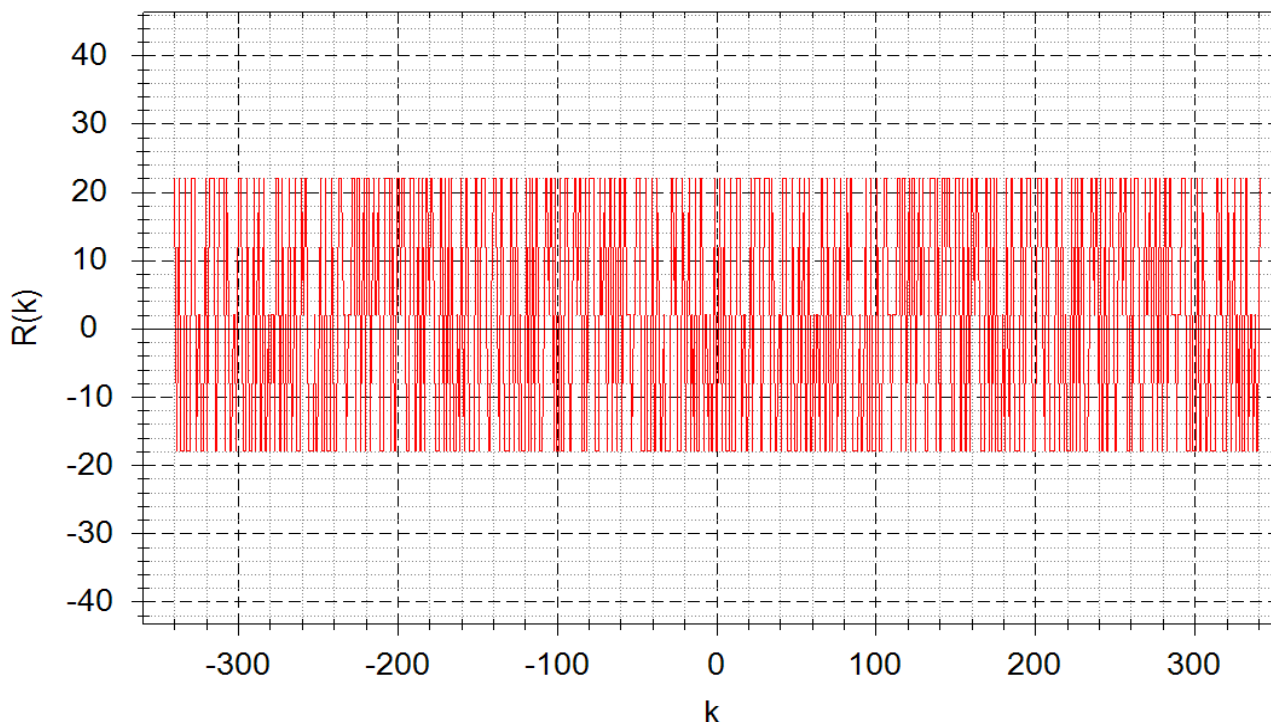


Рис. 2. ПВКФ 2-ой и 17-ой N-последовательностей при $L = 342$

Боковые выбросы аperiodических автокорреляционных функций рассматриваемого ансамбля лежат в пределах от -41 до 41. Каждая ААКФ содержит от 2 до 4 максимальных положительных выбросов и столько же максимальных отрицательных. Математическое ожидание побочных выбросов равно нулю, СКО выбросов $\sigma(u_{\delta}) = (8,5 \div 14,9)$. Модуль выбросов характеризуется величинами $m(|u_{\delta}|) = 6,5 \div 12,1$ и $\sigma(|u_{\delta}|) = 5,6 \div 8,7$. Максимальный и средний нормированные уровни боковых выбросов соответственно равны $\chi_{max} = (7,9 \div 12,0) \% \text{ от } L$ и $\chi_{cp} = (1,9 \div 3,5) \% \text{ от } L$. N-последовательности 19 и 20 имеют наилучшие ААКФ с точки зрения статистических характеристик.

Значения аperiodических взаимокорреляционных функций снизу ограничены величиной - 48, а сверху 47. Каждая АВКФ содержит от 1 до 3 максимальных положительных выбросов и от 1 до 3 максимальных отрицательных. Математическое ожидание выбросов $m(u_{\delta}) = 0,5$; СКО выбросов $\sigma(u_{\delta}) = (12,5 \div 13,8)$. Математическое ожидание модуля выбросов $m(|u_{\delta}|) = (10,0 \div 11,1)$, их СКО - $\sigma(|u_{\delta}|) = (7,1 \div 8,4)$. Значения нормированных уровней равны $\chi_{max} = (8,8 \div 14,0) \% \text{ от } L$ и $\chi_{cp} = (2,9 \div 3,3) \% \text{ от } L$. На рис. 3 приведена АВКФ 4-ой и 9-ой последовательностей, обладающая минимальным параметром $\chi_{max} = 8,8 \% \text{ от } L$ в ансамбле.

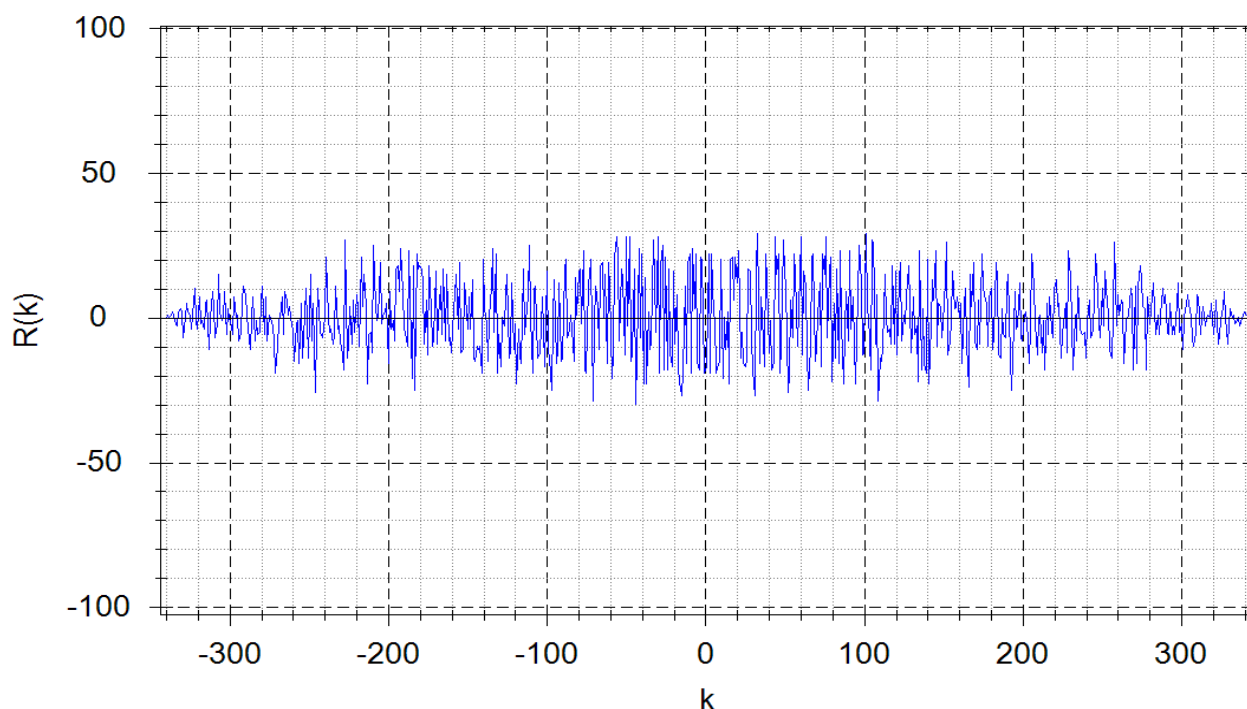


Рис. 2. АВКФ 4-ой и 9-ой N-последовательностей при $L = 342$

В табл. 2 приводится сводка характеристик по всему ансамблю N-последовательностей для $L = 342$

Таблица 2. Статистические характеристики N-последовательностей

Для периодических автокорреляционных функций									
$u_6\max$	$u_6\min$	$m(u_6)$	$m(u_6)$	$\sigma(u_6)$	$\sigma(u_6)$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{\text{ср}},\%$		
2; 22	-18	3,6÷19,0	-0,1	4,2÷4,9	6,1; 19,4	5,3; 6,4	1,1; 5,5		
Для аperiodических автокорреляционных функций									
$u_6\max$	$N_6\max$	$u_6\min$	$N_6\min$	$m(u_6)$	$m(u_6)$	$\sigma(u_6)$	$\sigma(u_6)$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{\text{ср}},\%$
23÷41	2÷4	(-41)÷(-24)	2÷4	6,5÷12,1	0	5,6÷8,7	8,5÷14,9	7,9÷12,0	1,9÷3,5
Для периодических взаимокорреляционных функций									
$u_6\max$	$u_6\min$	$m(u_6)$	$m(u_6)$	$\sigma(u_6)$	$\sigma(u_6)$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{\text{ср}},\%$		
22	-18	16,7÷18,9	0,9; 1,0	4,4÷7,0	18,1÷19,4	6,4	4,9÷5,5		
Для аperiodических взаимокорреляционных функций									
$u_6\max$	$N_6\max$	$u_6\min$	$N_6\min$	$m(u_6)$	$m(u_6)$	$\sigma(u_6)$	$\sigma(u_6)$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{\text{ср}},\%$
29÷47	1÷3	(-48)÷(-27)	1÷3	10,0÷11,1	0,5	7,1÷8,4	12,5÷13,8	8,8÷14,0	2,9÷3,3

Результаты исследования N-последовательностей.

- 1) N-последовательности не являются сбалансированными. При $L = 42$ количество нулей в последовательности равно 24, а количество единиц равно 18. Для последовательностей длины 110 эти значения составляют 60 и 50, а при $L = 342 - 180$ и 162;
- 2) в каждом ансамбле N-последовательностей существуют по две последовательности (предпоследняя и последняя согласно принятой нумерации в данной работе), обладающие лучшими характеристиками по сравнению с остальными последовательностями в данном ансамбле. Правило формирования этих двух последовательностей отличаются от правила формирования остальных последовательностей ансамбля;
- 3) периодические автокорреляционные функции N-последовательностей имеют трехуровневую структуру, за исключением двух последних в ансамбле, ПАКФ которых двухуровневые. Верхний предел математического ожидания модуля боковых выбросов у всех ПАКФ стремиться к значению $m(|u_6|) \rightarrow \sqrt{L}$. Математическое ожидание значения боковых выбросов для исследуемых семейств составляет $m(u_6) = -0,1$. Амплитуда максимальных положительных боковых выбросов определяется выражением $u_6 \max = p + 3$. Максимальный и средний уровни боковых лепестков при увеличении L значительно уменьшаются. Для N-последовательностей длины 342 элемента $\chi_{\max} \leq 6,4$ и $\chi_{\text{ср}} \leq 5,5$;
- 4) аperiodические автокорреляционные функции N-последовательностей имеют не менее 2 максимальных положительных боковых выбросов, а также не менее двух максимальных отрицательных боковых выбросов. Математическое ожидание боковых выбросов составляет $m(u_6) = 0$ при $L = 110; 342$, и $m(u_6) = -0,1$ при $L = 42$. С увеличением длины последовательностей максимальный и средний уровень боко-

вых выбросов уменьшается. Для N-последовательностей при $L=342$ $\chi_{max} \leq 12,0\%$ и $\chi_{cp} \leq 3,5\%$ от величины центрального пика;

- 5) периодические взаимокорреляционные функции N-последовательностей имеют трехуровневую структуру, причем значения выбросов соответствуют значениям выбросов ПАКФ. Верхняя граница математического ожидания модуля боковых выбросов у всех ПВКФ стремится к значению $m(|u_{\delta}|) \rightarrow \sqrt{L}$. Математическое ожидание выбросов $m(u_{\delta})$ не превышает 1,0 для всех ансамблей. Амплитуда максимальных положительных выбросов определяется выражением $u_{\delta max} = p + 3$. Нормированные значения выбросов χ_{max} и χ_{cp} уменьшаются с ростом длины последовательностей, причем χ_{max} для ПВКФ совпадает с верхним пределом χ_{max} для ПАКФ, а χ_{cp} для ПВКФ совпадает с верхним пределом значения χ_{cp} для ПАКФ;
- 6) аperiodические взаимокорреляционные функции исследуемых ансамблей имеют от одного до трех максимальных положительных выбросов, а также от одного до трех максимальных отрицательных выбросов (исключение составляет лишь одна АВКФ 4-ой и 6-ой N-последовательности при $L = 110$, которая имеет 8 максимальных отрицательных выбросов). Математическое ожидание выбросов $m(u_{\delta})$ АВКФ не превышает значения 0,5. Максимальный и средний уровни боковых лепестков при увеличении L уменьшаются. Для N-последовательностей длины 342 они не превышают значений 14,0 % и 3,3 % от L , соответственно.

Исследование характеристик семейства Di-последовательностей дало близкие результаты, вид корреляционных функций также практически тот же. Номенклатура длин Di-последовательностей $L = 42; 110; 342$. Периодические корреляционные функции Di-последовательностей также являются трехуровневыми, причем $u_{\delta max} = p + 3$. Отличительной особенностью Di-последовательностей является то, что объем их ансамбля на единицу меньше объема ансамбля N-последовательностей.

Далее приводятся сводка статистических характеристик (табл. 3) и наиболее характерные отличия характеристик N и Di-последовательностей.

Таблица 3. Статистические характеристики Di-последовательностей периода $L=342$

Для периодических автокорреляционных функций									
$u_{\delta\max}$	$u_{\delta\min}$	$m(u_{\delta})$	$m(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{\text{ср}},\%$		
2, 22	-18	3.6, 17.2	-0.1	4.9, 6.5	6.1, 18.4	5.3, 6.4	1.1, 5.0		
Для аperiodических автокорреляционных функций									
$u_{\delta\max}$	$N_{\delta\max}$	$u_{\delta\min}$	$N_{\delta\min}$	$m(u_{\delta})$	$m(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{\text{ср}},\%$
28÷44	2÷4	(-42)÷(-27)	2÷4	6,5÷10,9	0	5,6÷8,0	8,5÷13,4	9,1÷12,9	1,9÷3,2
Для периодических взаимокорреляционных функций									
$u_{\delta\max}$	$u_{\delta\min}$	$m(u_{\delta})$	$m(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{\text{ср}},\%$		
22	-18	16,4; 18,1	1,0	5,7; 7,3	17,9; 19,0	6,4	4,8; 5,3		

Для аperiodических взаимокорреляционных функций									
$u_{\delta \max}$	$N_{\delta \max}$	$u_{\delta \min}$	$N_{\delta \min}$	$m(u_{\delta})$	$m(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\chi_{\max}, \%$	$\chi_{\text{ср}}, \%$
30 ÷ 49	1 ÷ 4	-45 ÷ -27	1 ÷ 4	9.9 ÷ 11.3	0.5	7.4 ÷ 8.3	12.4 ÷ 13.9	9,1 ÷ 14,3	2,9 ÷ 3,3

Сравнение характеристик Di-последовательностей и N-последовательностей:

- 1) Di-последовательности так же, как и N-последовательности, не обладают свойством сбалансированности;
- 2) в каждом ансамбле Di-последовательностей существует 1 последовательность (последняя согласно принятой нумерации в данной работе), обладающая лучшими характеристиками по сравнению с остальными последовательностями в данном ансамбле. Правило формирования этой последовательности отличается от правила формирования остальных последовательностей ансамбля. В каждом ансамбле N-последовательностей таких две;
- 3) периодические автокорреляционные функции Di-последовательностей, как и у N-последовательностей, имеют трехуровневую структуру, за исключением одной в ансамбле, ПАКФ которой двухуровневая. Математическое ожидание значения боковых выбросов для N-последовательностей составляет $m(u_{\delta}) = -0,1$, что справедливо и для Di-последовательностей. Максимальный и средний уровни боковых лепестков при увеличении L у обоих ансамблей снижаются. Также отметим, что нижние границы значений параметров $m(|u_{\delta}|)$, $\sigma(|u_{\delta}|)$, $\sigma(u_{\delta})$ и $\chi_{\text{ср}}$, характеризующих ПАКФ, для обоих семейств последовательностей совпадают, верхние границы значений данных параметров несколько меньше у Di-последовательностей. Параметры $\chi_{\max}$ ПАКФ у ансамблей одинаковой длины обоих семейств равны;
- 4) границы упаковки аperiodических автокорреляционных функций у N-последовательностей и Di-последовательностей мало различаются от ансамбля к ансамблю, при $L = 42$ или $L = 110$ с точки зрения величины боковых выбросов предпочтительнее Di-последовательности, при $L = 342$ N-последовательности обладают меньшим разбросом значений амплитуд максимальных выбросов. Математические ожидания боковых выбросов $m(u_{\delta})$ также совпадают для ансамблей одинаковой длины обоих семейств. Общей является и тенденция к уменьшению нормированных уровней боковых выбросов с ростом L . В целом характеристики ААКФ для подмножеств последовательностей одинаковой длины у сравниваемых семейств эквивалентны, однако параметры $\sigma(u_{\delta})$ и $\chi_{\text{ср}}$ у Di-последовательностей несколько предпочтительнее;
- 5) периодические взаимокорреляционные функции Di-последовательностей, как и у N-последовательностей, имеют трехуровневую структуру, причем значения выбросов соответствуют значениям выбросов ПАКФ. Математическое ожидание выбросов $m(u_{\delta})$ ПВКФ Di-последовательностей равно верхней границе значений

$m(u_6)$ ПВКФ N-последовательностей для ансамблей одинаковых длин. Параметры $m(|u_6|)$, $\sigma(|u_6|)$, $\sigma(u_6)$ и χ_{cp} несколько лучше у Di-последовательностей;

- б) границы упаковки аperiodических взаимокорреляционных функций у N-последовательностей и Di-последовательностей также различаются от ансамбля к ансамблю на малую величину; при $L = 42$ и $L = 342$ АВКФ Di-последовательности имеют меньший разброс значений, при $L = 110$ – АВКФ ансамбля N-последовательностей предпочтительнее. Математическое ожидание выбросов $m(u_6)$ совпадает для ансамблей одинаковой длины обоих семейств. С увеличением длины последовательностей, нормированные уровни выбросов для обоих семейств снижаются, причем для $L = 342$ параметры χ_{cp} АВКФ у N-последовательностей и Di-последовательностей равны. Остальные статистические характеристики АВКФ у рассматриваемых семейств практически одинаковы.

Из сравнения характеристик N и Di-последовательностей следует, что эти семейства обладают сходными статистическими параметрами. Главным отличием является размер объема ансамбля V , который для каждой длины L на единицу больше у N-последовательностей.

Естественным является вопрос об объединении семейств N и Di-последовательностей для увеличения общего объема формируемых ансамблей. В табл. 4 представлены статистические характеристики для периодических и аperiodических взаимокорреляционных функций такого объединенного семейства.

Таблица 4. Статистические характеристики объединенного семейства N и Di последовательностей для $L = 342$

Для периодических взаимокорреляционных функций									
$u_{\delta\max}$	$u_{\delta\min}$	$m(u_{\delta})$	$m(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{cp},\%$		
2; 22; 42	-18	3,6÷18,9	(-0,1)÷1,0	4,4÷13,7	6,1÷20,5	5,3÷12,3	1,1÷5,5		
Для аperiodических взаимокорреляционных функций									
$u_{\delta\max}$	$N_{\delta\max}$	$u_{\delta\min}$	$N_{\delta\min}$	$m(u_{\delta})$	$m(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\sigma(u_{\delta})$	$\chi_{\max},\%$	$\chi_{cp},\%$
30÷58	1÷4	(-49)÷(-26)	1÷5	6,5÷11,1	0÷0,5	5,6÷9,8	8,5÷14,5	9,4÷17,0	1,9÷3,2

Как следует из табл. 4, периодические взаимокорреляционные функции объединенного ансамбля являются четырехуровневыми. Верхние границы значений параметров $m(|u_6|)$, $\sigma(|u_6|)$ и $\sigma(u_6)$ для ПВКФ расширенного ансамбля несколько выше, чем у каждого из семейств Di и N последовательностей. Верхняя граница значений такого важного параметра, как максимальный нормированный уровень выбросов $\chi_{\max}$, у большинства ПВКФ почти вдвое превышает аналогичный показатель у рассмотренных по отдельности семейств. Для аperiodических взаимокорреляционных функций в отношении $\chi_{\max}$ наблюдается схожая картина. Следовательно, использовать объединенный ансамбль нецелесообразно.

Заключение

На основании полученных результатов можно сделать следующие выводы.

- 1) Изученные последовательности имеют лучшие характеристики по сравнению широко известными двоичными последовательностями с точки зрения их взаимокорреляционных свойств [1,6], что позволит уменьшить внутрисистемную помеху;
- 2) в основе формирования исследуемых нелинейных последовательностей лежат сравнительно простые алгоритмы, что характеризует достаточно умеренную сложность возможной аппаратной реализации.

Таким образом, анализ N и D -последовательностей с помощью разработанного программного обеспечения позволяет оценить возможности использования сигналов на их основе в широкополосных системах.

Список литературы

1. Golomb S.W., Gong G. Signal design for good correlation for wireless communication, cryptography, and radar. New York: Cambridge University Press, 2005. 438 p.
2. Калмыков В.В., Федоров И.Б., Юдачев С.С. Системы сотовой и спутниковой связи. М.: Изд-во «Рудомино», 2010. 280 с.
3. Камалетдинов Б.Ж. Оптимальные множества бинарных последовательностей // Проблемы передачи информации. 1996. Т. 32, № 2. С. 39-44.
4. Ипатов В.П. Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения: пер. с англ./ под ред. В.П. Ипатова. М.: Техносфера, 2007. 488 с. [Valery P. Ipatov. Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications. New York: John Wiley and Sons Ltd, 2005.].
5. Welch L.R. Lower Bounds on the Maximum Cross Correlation of Signals // IEEE Trans. Inform. Theory. 1974. Vol. 20, no. 3. P. 397-399.
6. Шумоподобные сигналы в системах передачи информации / В.Б. Пестряков, В.П. Афанасьев, В.Л. Гурвиц, Д.Л.Зайцев, Л.И.Зеликман, А.В.Пестряков, А.Л.Сенявский, Н.И.Смирнов; под ред. В.Б. Пестрякова. М.: Советское радио, 1973. 424 с.

On a class of optimal nonlinear binary sequences

04, April 2014

DOI: 10.7463/0414.0704644**S.S. Yudachev**

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

judachev@gmail.com

Investigated class of binary sequences is designed for use in advanced spread spectrum radio systems for various purposes, based on the application of code sequences. The paper considers the class of nonlinear binary sequences that are optimal in the sense of the boundaries of packaging. The idea of such sequences development and mathematical method of their construction first were proposed by B.J. Kamaletdinov. These sequences differ favorably from those widely used now by large variety of ways of forming the fine structure of the code, representative set of lengths, and difficulty of deciphering. However, the properties of these sequences and methods of their generating insufficiently investigated.

The paper presents a practical algorithm for the formation of ensembles of two subclasses of Kamaletdinov N and Di-sequences. Based on this algorithm and its software implementation in C #, ensemble samples of various lengths are obtained and their periodic and aperiodic correlation functions and statistical characteristics are thoroughly investigated. Some of the most significant correlation functions are provided as illustrations and the most notable characteristics of the ensemble sequences are considered. Boundaries of package for ensembles of various lengths are given. The statistical characteristics of N and Di-sequences are compared and specific differences of characteristics are highlighted. Based on the study of cross correlation characteristics of combined ensemble and Di-N sequences it was concluded that application of such an ensemble is unreasonable. The annex contains the three first samples of sequences from each test ensemble of the length $L = 342$.

On the basis of the calculations performed the conclusion can be made about the prospects of studied classes of sequences application which allows to reduce intersystem interference in the projected spread spectrum systems with code division multiple channels.

Publications with keywords: [correlation properties](#), [spread spectrum systems](#), [nonlinear binary sequences](#), [Galois fields](#), [primitive field element](#)

Publications with words: [correlation properties](#), [spread spectrum systems](#), [nonlinear binary sequences](#), [Galois fields](#), [primitive field element](#)

References

1. Golomb S.W., Gong G. *Signal design for good correlation for wireless communication, cryptography, and radar*. New York, Cambridge University Press, 2005. 438 p.
2. Kalmykov V.V., Fedorov I.B., Yudachev S.S. *Sistemy sotovoy i sputnikovoy svyazi* [Systems of cellular and satellite communications]. Moscow, Rudomino Publ., 2010. 280 p. (in Russian).
3. Kamaletdinov B.Zh. [Optimal sets of binary sequences]. *Problemy peredachi informatsii*, 1996, vol. 32, no. 2, pp. 39-44. (English translation: *Problems of Information Transmission*, 1996, vol.32, no.2, pp. 171-175).
4. Ipatov V.P. *Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications*. New York, John Wiley and Sons Ltd, 2005. (Russ. ed.: Ipatov V.P. *Shirokopolosnye sistemy i kodovoe razdelenie signalov. Printsipy i prilozheniya*. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2007. 488 p.).
5. Welch L.R. Lower Bounds on the Maximum Cross Correlation of Signals. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 1974, vol. 20, no. 3, pp. 397-399. DOI: [10.1109/TIT.1974.1055219](https://doi.org/10.1109/TIT.1974.1055219)
6. Pestryakov V.B., Afanas'ev V.P., Gurvits V.L., Zaytsev D.L., Zelikman L.I., Pestryakov A.V., Senyavskiy A.L., Smirnov N.I. *Shumopodobnye signaly v sistemakh peredachi informatsii* [Noise-like signals in data transmission systems]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1973. 424 p. (in Russian).