электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51036. ISSN 2307-0595

Алгебраический синтез системы управления магнитным подвесом

 # 04, апрель 2014
УДК: 621.313
автор: Боевкин В. И.

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
vicboevkin@mail.ru

Введение

В работе [1] рассмотрены основные вопросы проектирования активных магнитных подвесов, в том числе уравнения движения и различные законы управления. Там же приведен подробный обзор технической литературы по конструкциям магнитных подвесов и системам их управления. Однако, в силу общности и многоплановости этой работы, результаты не доводятся до конкретной структурной схемы системы, выбора параметров передаточных функций и построения переходных процессов.

Целью настоящей работы является разработка прямого алгебраического метода синтеза линейных систем управления , позволяющего выбрать параметры системы по заданным статическим и динамическим свойствам.

Кроме того, целью является проектирование системы управления для магнитного подвеса с выбором всех параметров передаточных функций и построением переходных процессов.

Научная новизна настоящей статьи заключается в достижении поставленных целей.

В основу проектирования системы управления магнитным подвесом был заложен корневой метод, предложенный Т.Н. Соколовым [2] и получивший развитие в работах [3], [4] и др.

Недостатками корневых методов являются:

-- отсутствие общей структурной схемы системы

-- отсутствие общего однозначного алгоритма определения варьируемых параметров

-- многократное вычисление корней характеристического уравнения, поскольку оценка быстродействия и качества управления производится по получившейся комбинации корней.

В настоящей работе предлагается оригинальная разновидность корневого метода с общей структурной схемой и однозначным вычислением варьируемых параметров.

Общая структурная схема содержит управляемый объект с произвольной передаточной функцией и динамическое звено (фильтр), формирующее закон управления. Структура и параметры фильтра выбираются из условия желаемого расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Сущность предлагаемого алгебраического метода синтеза поясняется ниже, на примере магнитного подвеса.

1. Описание магнитного подвеса

Для краткого ознакомления с объектом управления приведем выписку из статьи [1]:

«Схема одностепенного магнитного подвеса одностороннего действия показана на рис.1. Ферромагнитное тело (якорь) массой m должно удерживаться на расстоянии δ от полюсов электромагнита. Текущее значение воздушного зазора между телом и полюсами

$$q(t) = \delta - y(t)$$

Где $y(t)$ – смещение тела из заданного положения, или управляемая координата.

На тело действуют две силы: сила тяжести $Q = mg$ и магнитная сила F. К обмотке электромагнита, имеющей число витков n, сопротивление r и ток i, приложено управляющее напряжение u. Ток i вызывает магнитный поток Φ, поэтому потокосцепление обмотки $\psi = n\Phi$.

Механическое движение на основании второго закона Ньютона описывается дифференциальным уравнением

$$m\ddot{y} = F - Q.$$

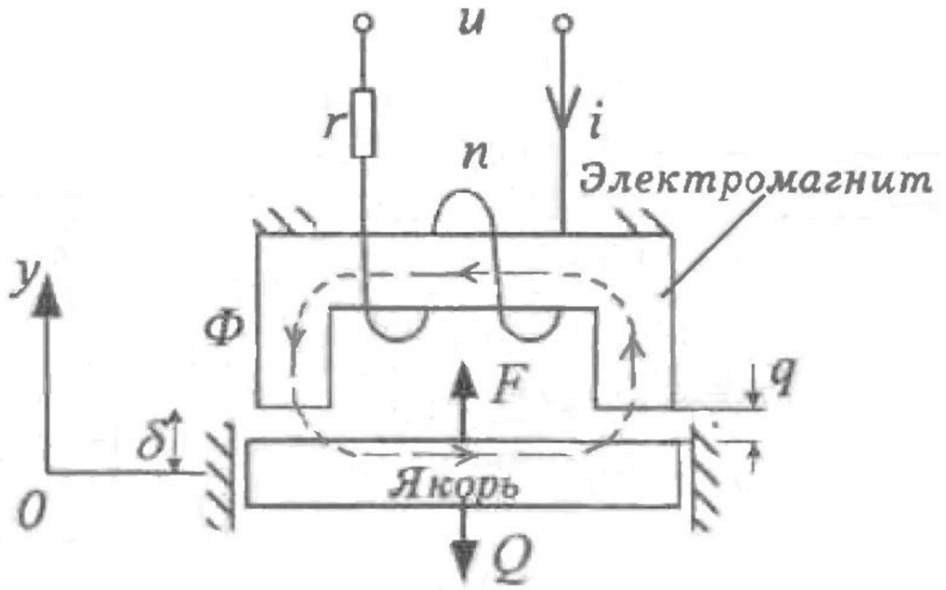


Рис.1. Магнитный подвес одностороннего действия

Магнитная сила F может быть определена из рассмотрения электромагнитных процессов. Согласно второму закону Кирхгофа эти процессы описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d\psi}{dt} + ri = u» .$$

Из Рис.1. ясно, что при $y = 0$ вес якоря Q должен быть уравновешен либо постоянным магнитом, либо постоянной составляющей тока i_0 в электромагните. В этом случае уравнения движения линеаризуются и имеют вид [1]:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{y}(t) &= hi(t) + cy(t) + \Delta P(t) \\ L\frac{di}{dt} + ri(t) &= u(t) - h\frac{dy}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Здесь приняты следующие обозначения.

Переменные:

y(t) [*м*] - отклонение подвижной части от середины зазора электромагнита;

i(t) [*а*] - ток в обмотке электромагнита, если вес ротора уравновешен постоянным магнитом, либо отклонение тока от уравновешивающего тока i_0;

u(t) [*в*] - напряжение на обмотке электромагнита.

Параметры подвеса и их значения, заимствованные из [5]:

масса подвижной части *m*=1000[*кг*];

отрицательная магнитная жесткость $c = 2 \cdot 10^7 \left[\frac{н}{м}\right]$;

коэффициент силы по току в первом уравнении (1) и коэффициент противоЭДС во втором уравнении (1) $h = \sqrt{2} \cdot 1000 \left[\frac{н}{а}\right]$;

индуктивность обмотки $L = 0{,}1[гн]$;

сопротивление обмотки электромагнита $r = 1[Ом]$;

Внешняя сила $\Delta P[н]$.

Значения переменных и констант приняты в системе СИ.

Отметим, что линеаризованные уравнения двустороннего электромагнитного подвеса имеют такой же вид (1).

Поделив уравнения (1) на коэффициенты при старших производных и применив к ним преобразование Лапласа, получим систему уравнений в изображениях Лапласа:

$$(p^2 - \alpha)y(p) = b_0 i(p) + f(p)\ , \tag{2}$$

$$(p + d_0)i(p) = d_1 u(p) - d_2 p y(p)\ . \tag{3}$$

В уравнениях (2) и (3) введены следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{c}{m} = 2 \cdot 10^4 \left[\frac{н}{м \cdot кг}\right]; b_0 = \frac{h}{m} = \sqrt{2}\left[\frac{н}{а \cdot кг}\right]; d_0 = \frac{r}{\alpha} = 10\left[\frac{1}{сек}\right];$$

$$d_1 = \frac{1}{\alpha} = 10\left[\frac{1}{гн}\right];\ d_2 = \frac{h}{\alpha} = \sqrt{2} \cdot 10^4\left[\frac{Н}{а \cdot гн}\right];\ f(p) = \left(\frac{\Delta P}{mp}\right). \tag{4}$$

Отметим, что единичному входному возмущению $f(p) = \frac{1}{p}$ соответствует ступенька по внешней силе $\Delta P = 1000$ ньютонов.

Построение системы управления магнитным подвесом можно строить двумя способами – управлением по току или управлением по напряжению. В первом случае усилитель мощности должен быть охвачен глубокой отрицательной обратной связью по току, во втором – обратной связью по напряжению.

2. Управление по току

Объект управления (магнитный подвес), описывается в этом случае уравнением (2).

Ток *i(t)* необходимо сформировать так, чтобы магнитный подвес обладал некоторыми заданными статическими и динамическими свойствами. Требования к динамике подвеса сформулируем в виде желаемого расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы. Кроме того потребуем, чтобы в установившемся режиме, при ступенчатом входном возмущении, отклонение по *y(t)* было равно нулю.

Задав желаемые корни в левой полуплоскости, мы обеспечим устойчивость системы.

Задав наименьшую по модулю вещественную часть среди всех корней замкнутой системы η (степень устойчивости), обеспечим длительность переходного процесса T_0 порядка

$$T_0 \approx \frac{3 \div 5}{\eta}. \qquad (5)$$

Закон управления сформируем в виде фильтра с дифференцирующими свойствами, включенного в отрицательную обратную связь:

$$\frac{i(p)}{y(p)} = -W_{\phi}(p) = -\frac{G(p)}{R(p)} = -\frac{g_{\mu} p^{\mu} + \ldots + g_1 p + g_0}{p^{\nu} + r_{\nu-1} p^{\nu-1} + \ldots + r_1 p + r_0}. \qquad (6)$$

Здесь $G(p)$ и $R(p)$ – полиномы с неопределенными коэффициентами, которые будем выбирать так, чтобы обеспечить желаемые значения корней характеристического уравнения замкнутой системы; μ - порядок числителя *G(p)*; ν- порядок знаменателя *R(p)*.

Структурная схема фильтра с передаточной функцией (6), построенная на интеграторах, вплоть до $\mu = \nu$, представлена на Рис.2.

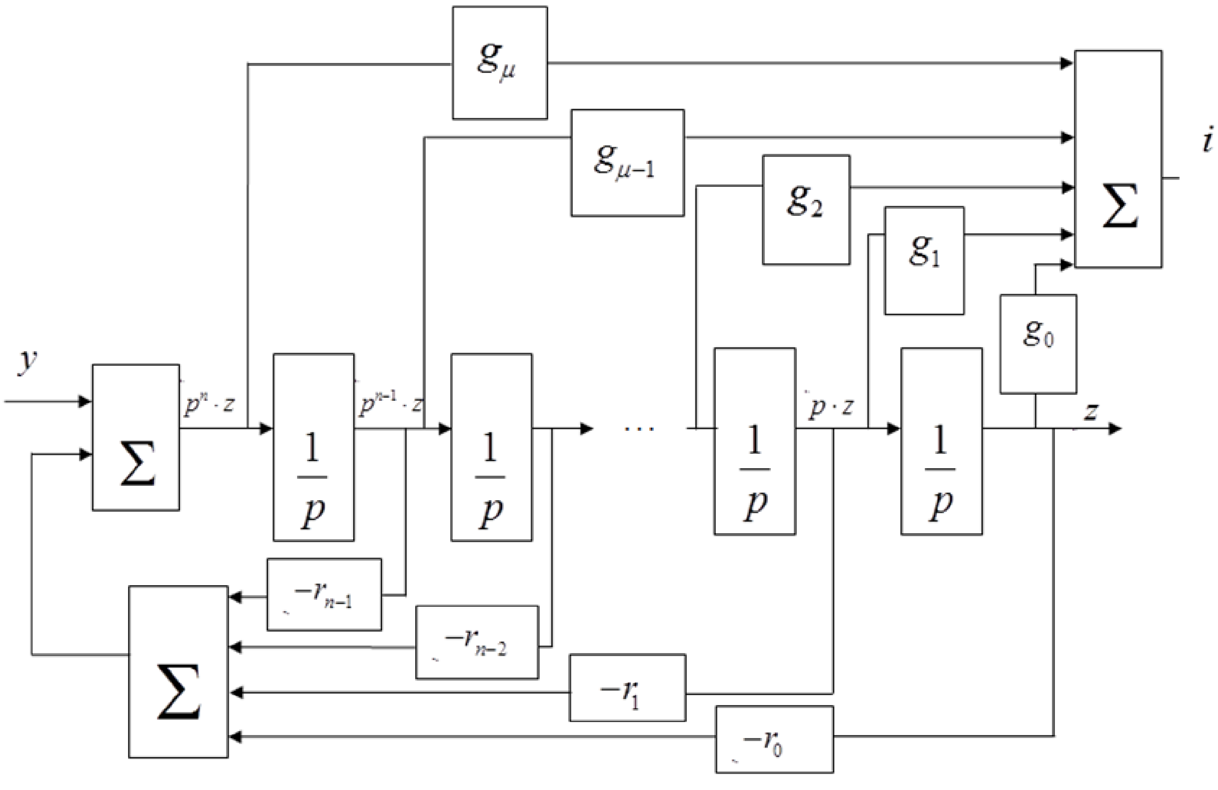


Рис.2. Структурная схема фильтра произвольного порядка с дифференцирующими свойствами, построенная на интеграторах.

Для обеспечения нулевого отклонения по *y* в установившемся режиме в обратной связи должен содержаться интегральный множитель, что реализуется при $r_0 = 0$.

Количество N1 существенных коэффициентов фильтра при $\nu = \mu$ и $r_0 = 0$ равно

$$N_1 = 2\nu.$$

Если q – порядок объекта, то порядок N системы, а значит и число корней характеристического уравнения замкнутой имеет вид:

$$N=q+\nu.$$

Для принципиальной разрешимости задачи нужно, чтобы число задаваемых параметров было равно числу свободных параметров, т.е. $N=N_1$, откуда

$$\nu=\mu=q; \qquad N=2q. \qquad (7)$$

Таким образом, для рассматриваемой задачи, где *q = 2*, с учетом (7), передаточная функция фильтра (6) должна иметь вид:

$$\frac{i(p)}{y(p)}=-W_{\phi}(p)=-\frac{G(p)}{R(p)}=-\frac{g_2p^2+g_1p+g_0}{(p+r_1)p}. \qquad (8)$$

Подставив *i(p)* из (8) в (2), после некоторых преобразований получим передаточную функцию замкнутой системы по отношению к внешней силе *f(p)*:

$$W(p)=\frac{y(p)}{f(p)}=\frac{p(p+r_1)}{p^4+p^3a_3+p^2a_2+pa_1+a_0}. \qquad (9)$$

Здесь

$$a_3=r_1;\ a_2=(b_0g_2-\alpha);\ a_1=(b_0g_1-r_1\alpha);\ a_0=b_0g_0. \qquad (10)$$

Передаточная функция (9) и ее коэффициенты выражены через физические параметры (4) объекта и фильтра.

Характеристическое уравнение для замкнутой системы, соответствующее (9) и (10), имеет вид:

$$p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0=0. \qquad (11)$$

Корни характеристического уравнения (11) в большей степени определяют динамические свойства системы управления. Желаемое характеристическое уравнение четвертого порядка сформируем в виде двух колебательных составляющих с наилучшим затуханием :

$$A(p)=(p^2+2\eta p+2\eta^2)(p^2+2\eta n+2\eta^2n^2)=0. \qquad (12)$$

Такому представлению соответствует две пары комплексных корней:

$$p_{1,2}=-\eta\pm i\eta; \quad p_{3,4}=-n\eta\pm in\eta. \qquad (13)$$

Степень устойчивости η характеризует быстродействие системы в соответсвии с оценкой (5). Величина *n*, характеризующая относительное удаление второй пары корней от мнимой оси, влияет на форму переходного процесса.

Приведя (12) к виду (11), получим желаемые значения коэффициентов a_{0i}, *i=0…3* характеристического уравнения, выраженные через параметры желаемых корней η и *n*:

$$a_{03}=2\eta(n+1);\quad a_{02}=2\eta^2(n+1)^2;\quad a_{01}=4\eta^3n(n+1);\quad a_{00}=4\eta^4n^2. \qquad (14)$$

Приравнивая коэффициенты (10) характеристического уравнения, выраженные через физические параметры их желаемым значениям (14), получим линейную систему алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно параметров фильтра. В рассматриваемом случае эта СЛАУ имеет треугольную матрицу и легко разрешается:

$$r_1 = a_{03}; \quad g_2 = \frac{(a_{02} + \alpha)}{b_0}; \quad g_1 = \frac{1}{b_0}(a_{01} + r_1\alpha); \quad g_0 = \frac{a_{00}}{b_0}. \tag{15}$$

В общем случае, при более сложных объектах, упомянутая выше СЛАУ также имеет вещественное решение.

Значения (15) параметров фильтра (8) обеспечивают вид характеристического уравнения (12). Поэтому изображение выходной величины *y(p)* можно получить из (9), (12) и (15) в следующем виде:

$$y(p) = \frac{p(p + r_1) \cdot f(p)}{A(p)}. \tag{16}$$

Подставив (16) в уравнение фильтра (8), получим изображение Лапласа для управляющего тока:

$$i(p) = -\frac{(g_2 p^2 + g_1 p + g_0) \cdot f(p)}{A(p)}. \tag{17}$$

Подставив во второе уравнение (2) изображения (16) и (17), получим изображение Лапласа для напряжения U, которое должно быть приложено к обмотке электромагнита в течение переходного процесса при управлении по току:

$$U(p) = \frac{[d_2 p^2 (p + r_1) - (p + d_0)(g_2 p^2 + g_1 p + g_0)] \cdot f(p)}{d_1 A(p)}. \tag{18}$$

Соотношения (16), (17), и (18) позволяют построить переходные процессы в замкнутой системе управления по всем параметрам, а также построить их частотные характеристики. По передаточной функции фильтра (8) с параметрами (16) можно сделать то же самое для фильтра.

4. Управление по напряжению

Уравнение объекта при управлении по напряжению получим, исключив из уравнения (2) ток *i(p)* с использованием уравнения (3):

$$y(p)\left[p^3 + p^2 d_0 + p(b_0 d_2 - \alpha) - d_0\alpha\right] = b_0 d_1 U(p) + (p + d_0) f(p). \tag{19}$$

Для объекта третьего порядка (19) управляющий фильтр (6), в соответствии с соотношением (7), должен быть тоже третьего порядка, а именно:

$$\frac{U(p)}{y(p)} = -W_\phi(p) = -\frac{g_3 p^3 + g_2 p^2 + g_1 p + g_0}{(p^2 + r_2 p + r_1)p} \tag{20}$$

Исключив из (19) и (20) U(p) получим передаточную функцию замкнутой системы по *y(p)* относительно внешней силы f(p), выраженную через физические параметры:

$$W(p)=\frac{y(p)}{f(p)}=\frac{(p+d_0)(p^2+r_2p+r_1)p}{(p^6+a_5p^5+a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0)} \tag{21}$$

Здесь:

$$a_5=d_0+r_2;\ a_4=(b_0d_2-\alpha)+d_0r_2+r_1;\ a_3=-d_0\alpha+r_2(b_0d_2-\alpha)+r_1d_0+b_0d_1g_3;$$
$$a_2=-r_2d_0\alpha+r_1(b_0d_2-\alpha)+b_0d_1g_2;\ a_1=-r_1d_0\alpha+b_0d_1g_1;\ a_0=b_0d_1g_0\ . \tag{22}$$

Поскольку характеристическое уравнение замкнутой системы (знаменатель выражения (21)) имеет шестой порядок, то и желаемую форму его запишем в виде трех колебательных составляющих:

$$A1(p)=\left(p^2+2\eta p+2\eta^2\right)\left(p^2+2n\eta p+2n^2\eta^2\right)\left(p^2+2n_1\eta p+2n_1^2\eta^2\right). \tag{23}$$

Здесь η и n имеют тот же смысл что и в выражениях (12) и (13), а величина n_1 характеризует относительное удаление третьей пары корней от мнимой оси.

Отметим, что задавать кратные желаемые корни нецелесообразно, так как при этом корни становятся очень чувствительными к малым изменениям физических параметров системы [6].

Приведя (23) к виду полинома по степеням *p*, получим желаемые коэффициенты характеристического уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&a_{05}=2\eta\left(n+n_1+1\right);a_{04}=2\eta^2\left(n+n_1+1\right)^2;\\
&a_{03}=4\eta^3\left(n+1\right)\left[n_1^2+n_1\left(n+1\right)+n\right];a_{02}=4\eta^4\left[n_1\left(n+1\right)+n\right]^2;\\
&a_{01}=8\eta^5n_1n\left[n_1\left(n+1\right)+n\right];a_{00}=8\eta^6n^2n_1^2.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Приравнивая коэффициенты (22) их желаемым значениям (24), получим систему уравнений для определения параметров фильтра, которая легко разрешается:

$$\left.\begin{aligned}
&r_2=a_{05}-d_0;\\
&r_1=a_{04}-d_0r_2-\left(b_0d_2-\alpha\right);\\
&g_3=\frac{1}{b_0d_1}\left(a_{03}-d_0\alpha-r_2\left(b_0d_2-\alpha\right)-r_1d_0\right);\\
&g_2=\frac{1}{b_0d_1}\left(a_{02}-\left(b_0d_2-\alpha\right)r_1+\alpha r_2d_0\right);\\
&g_1=\frac{1}{b_0d_1}\left(a_{01}+\alpha d_0r_1\right).\\
&g_0=\frac{a_{00}}{b_0d_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Если параметры фильтра принять по (25), то изображение выходной величины *y(p)* можно получить из (21) с учетом (23).

$$y(p) = \frac{(p+d_0)(p^2+r_2p+r_1)pf(p)}{A1(p)} \tag{26}$$

Из (20) и (26) получим изображение управляющего напряжения *U(p)*:

$$U(p) = -\frac{(g_3p^3+g_2p^2+g_1p+g_0)(p+d_0)f(p)}{A1(p)} \tag{27}$$

Выразив из (3) ток *i(p)* через отклонение *y(p)* и управляющее напряжение *U(p)* и используя (26) и (27) получим изображение тока *i(p)*, который будет протекать в обмотке при управлении по напряжению:

$$i(p) = -\frac{[d_1(g_3p^3+g_2p^2+g_1p+g_0)+d_2p^2(p^2+r_2p+r_1)]}{A1(p)} \cdot f(p) \tag{28}$$

Соотношения (26), (27) и (28), а так же передаточная функция фильтра (20) позволяют построить переходные процессы и частотные характеристики по всем параметрам замкнутой системы управления и в изолированном фильтре.

4. Расчеты динамических характеристик магнитных подвесов

Расчеты динамических характеристик систем управления магнитных подвесов производились для значений параметров механической части самого подвеса (4).

На рис.3 и рис.4 представлены переходные процессы по *Y(t)* при управлении по току и напряжению соответственно при $\eta = 12$ и различных *n*. В управлении по напряжению во всех расчетах принято $n_1 = n+1$, из (23). Величины *n* выбирались так, чтобы Y_{max} на соответствующей кривой принимало значения от 0.1 до 0.5 мм.

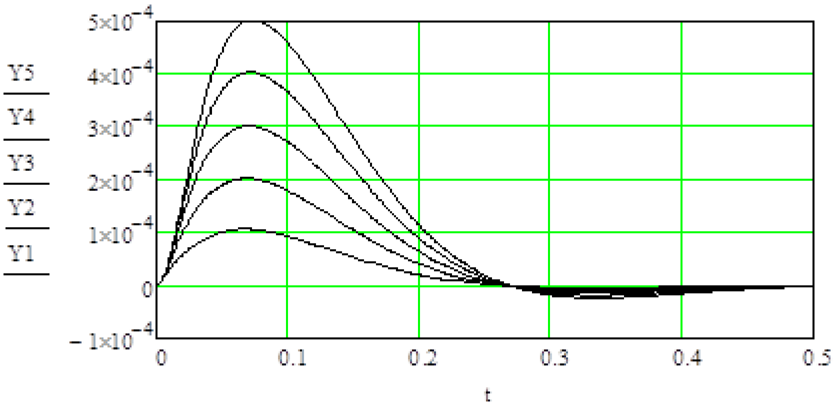


Рис.3. Переходные процессы по Y(t) при управлении по току при η = 12, n1 = n + 1.

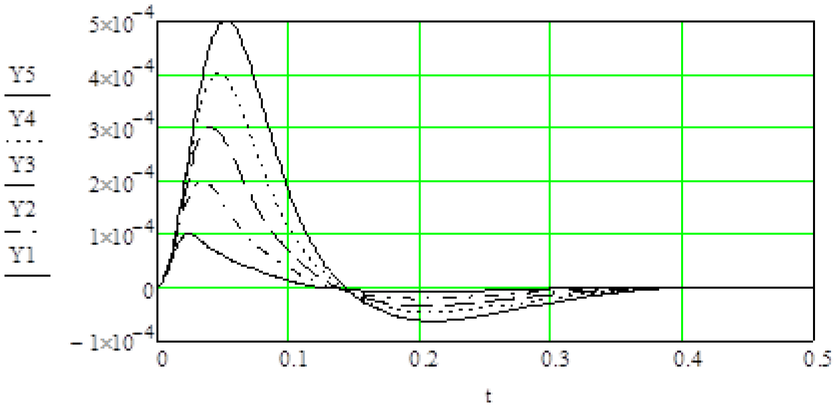


Рис.4. Переходные процессы по Y(t) при управлении по напряжению
при η = 12, n1 = n+1

Из сравнения рис.3. и рис.4. можно видеть, что при одинаковых $Y_{\max}$ колебательность процесса при управлении по напряжению несколько больше. При изменении η и сохранении $Y_{\max}$ характер переходных процессов по *Y(t)* практически не изменяется, изменяется масштаб по времени в соответствии с оценкой (5).

В таблице 1 представлены значения относительного удаления корней *n* для желаемых значений $Y_{\max}$ и η. Верхнее значение n в каждой ячейке соответствует управлению по току, нижнее значение – для управления по напряжению.

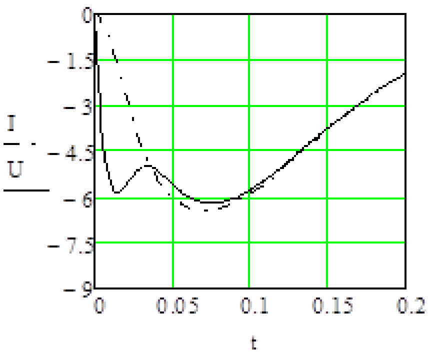
Таблица 1.Относительное удаление *n* желаемых корней

$Ym[мм]$ \ $\eta\left[\frac{1}{c}\right]$		8	10	12	14
0.5	Т	11	7.35	5.39	4.16
	Н	7	5.25	4.1	3.31
0.4	Т	13.55	9	6.5	5.02
	Н	7.95	6	4.72	3.83
0.3	Т	17.8	11.7	8.4	6.4
	Н	9.35	7.1	5.65	4.61
0.2	Т	25.8	17	12.1	9.15
	Н	11.7	9	7.2	5.92
0.1	Т	51	33	22.2	17.4
	Н	17	13.2	10.7	8.9

Существенными характеристиками системы управления являются переходные процессы по току и напряжению, и особенно их максимальные значения в течение переходных процессов.

На рис.5 представлены для примера начала переходных процессов по току $I(t)$ и приведенному напряжению $\frac{U(t)}{r}$ для системы управления по току при значениях $Y_{\max} = 0.4[мм]$ и $\eta = 12$, что соответствует оценке длительности переходного процесса $T \approx 0.3[сек]$.

На рис.6 представлены аналогичные переходные процессы для системы управления по напряжению.



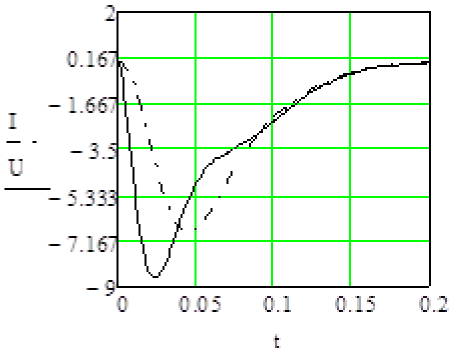


Рис.5. Управление по току **Рис.6.** Управление по напряжению

Из графиков Рис.5 и Рис.6 можно видеть, в начале переходных процессов кривые по току и напряжению расходятся и имеют различные максимальные значения. После $t \approx 0.1[сек]$графики тока и приведенного напряжения сливаются. Для рассмотренного случая $Y_{\max} = 0.4[мм]$ и $\eta = 12$при управлению по току $|I|_{\max} > \left|\frac{U}{r}\right|_{\max}$, а при управлении по напряжению – наоборот. При других значениях $Y_{\max}$ и η эти соотношения могут быть другими.

В Таблице 2 представлены максимальные значения токов *Imax* в зависимости от желаемых значений *Ym* и η. Верхнее значение в каждой ячейке соответствует управлению по току, нижнее значение – для управления по напряжению.

Таблица 2 Максимальные значения управляющих токов I_{max}

$Ym[мм]$ \ $\eta\left[\frac{1}{c}\right]$		8	10	12	14
0.5	Т	7.835	7.868	7.888	7.961
	Н	8.116	8.193	8.269	8.281
0.4	Т	6.398	6.413	6.462	6.488
	Н	6.697	6.768	6.83	6.859
0.3	Т	4.965	4.989	5.004	5.036
	Н	5.27	5.343	5.366	5.411
0.2	Т	3.595	3.578	3.587	3.593
	Н	3.847	3.883	3.926	3.969
0.1	Т	2.141	2.145	2.22	2.15
	Н	2.436	2.468	2.492	2.522

В Таблице 3 представлены максимальные значения напряжений U_{max} в зависимости от желаемых значений *Ym* и η. Верхнее значение в каждой ячейке таблицы соответствует управлению по току, нижнее значение – для управления по напряжению.

Таблица 3 Максимальные значения управляющих напряжений U_{max}

$Ym[мм]$ \ $\eta\left[\frac{1}{c}\right]$		8	10	12	14
0.5	Т	7.762	7.726	7.54	7.384
	Н	8.681	8.927	9.159	9.343
0.4	Т	6.364	6.307	6.238	6.032
	Н	8.312	8.485	8.654	8.804
0.3	Т	7.728	6.871	6.465	6.282
	Н	8.367	8.472	8.586	8.695
0.2	Т	10.515	9.094	8.21	7.678
	Н	9.108	9.163	9.235	9.294
0.1	Т	19.614	15.92	13.573	12.655
	Н	11.683	11.705	11.74	11.751

Используя приведенные выше таблицы легко выбрать все параметры системы управления магнитным подвесом. Задавшись желаемым максимальным отклонением по регулируемой величине *Ym* и желаемым быстродействием η, по Таблице 1 находим параметр *n* для обоих способов управления. Максимальные значения управляющих токов находим по Таблице 2, максимальные значения управляющих напряжений – по Таблице 3.

5. Заключение

При проектировании системы управления магнитным подвесом применен способ, основанный на обеспечении желаемых значений корней характеристического уравнения замкнутой системы, который реализуется с помощью фильтра с дифференцирующими свойствами, построенного на интеграторах. Получены передаточные функции по всем параметрам, приведен пример расчета системы, иллюстрирующий возможность обеспечения желаемых динамических характеристик в широком диапазоне.

Подобное исследование целесообразно проводить на первых этапах проектирования системы управления.

6. Литература

1.Ю.Н. Журавлев ., Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. -- СПб.: Политехника, 2003.

2. Т.Н. Соколов., Электромеханические системы автоматического управления. Госэнергоиздат, 1952.

3. В.А. Бесекерский, Е.П. Попов., Теория систем автоматического управления. -- М.: Наука; 1972.

4. Н.Т. Кузовков, С.В. Карабанов, О.С. Салычев., Непрерывные и дискретные системы управления и методы идентификации. –М.: Машиностроение ; 1978.

5. В.П. Верещагин, В.А. Клабуков., Математическая модель магнитного подшипника. -- М.: ОАО Корпорация “ВНИИ ЭМ” ; Вопросы электромеханики – Т. 112. 2009.

6. В.И. Боевкин., Оценка точности математического моделирования динамических систем. – М.: МГТУ; 1990.