НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Декомпозиционный метод анализа замкнутых сетей массового обслуживания

02, февраль 2014
DOI: 10.7463/0214.0700018

Нестеров Ю. Г.

УДК 519.872

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
ugn@bmstu.ru

Введение

Замкнутые сети массового обслуживания (СеМО), в которых, в отличие от разомкнутых СеМО, популяция заявок фиксирована, широко используются в качестве моделей для оценки временных характеристик информационных систем, а также других систем массового обслуживания, например в торговле, логистике и т.п. [1, 2]. Получено большое количество результатов для конкретных, частных типов замкнутых СМО и СеМО [2-5,14-19]. Однако до сих пор не существует общих аналитических методов, пригодных для анализа широкого класса таких сетей. Метод имитационного моделирования, являясь универсальным инструментом анализа подобных систем, тем не менее не лишен ряда недостатков.

В настоящей работе предложен метод анализа широкого класса замкнутых СеМО, основанный на:

- декомпозиции исходной сети на совокупность замкнутых СМО, неизвестные параметры которых связаны системой нелинейных уравнений баланса;

- доказательстве существования решения полученной системы уравнений;

- нахождении решения полученной системы уравнений модифицированным методом Ньютона-Канторовича.

Постановка задачи.

Рассмотрим класс замкнутых СеМО, описываемый кортежем S:

$$S = < L, R, P, N, B, D, \beta, \delta, \gamma > \quad (1).$$

здесь:

L= [1, L] - множество индексов узлов СеМО, L- число узлов. Узел СеМО представляет собой один или несколько обслуживающих аппаратов (ОА), очередь перед ним(и) и соответствующую дисциплину обслуживания заявок из этой очереди.

R= [1,R] - множество индексов классов заявок в СеМО, R – число классов.

P= { P^r } – множество стохастических квадратных матриц P^r размером LxL, здесь и далее верхний индекс r означает номер класса заявки, r ∈ R.

$P^r = [p^r_{ij}]_{LxL}$ стохастическая матрица вероятностей переходов заявок класса ‘r’ между узлами сети.

p^r_{ij} - вероятность того, что заявка класса ‘r’ из узла ‘i’ после окончания обслуживания перейдет в узел ‘j’ (i,j∈L, r∈R), причем ∀i(i∈L), $\sum_{j=1}^{L} p^r_{ij} = 1$.

N=(N_1, N_2,…,N_r,…,N_R) - вектор популяции заявок, 1≤N_r - число заявок класса ‘r’, натуральное число.

B - множество функций распределения вероятностей (ФРВ) с конечным первым моментом, что является достаточным условием существования стационарного режима в СеМО [3].

D – множество дисциплин обслуживания заявок в узлах СеМО, имеющих консервативный характер, т.е. сохраняющих проделанную работу (например, абсолютные приоритеты с дообслуживанием прерванных заявок, относительные приоритеты, первый пришел - первым обслужен, различные виды циклического обслуживания с квантованием времени и без него, немедленное обслуживание, когда число ОА не меньше числа заявок).

β: (L x R) → B - отображение, задающее для заявок класса ‘r’ (r∈R) ФРВ времени обслуживания - $B_{jr}(t)$ в узле ‘j’ (j∈L).

δ: L → D - отображение, задающее для каждого узла СеМО дисциплину обслуживания.

γ: L → [1,2,3…) – отображение, задающее число ОА в каждом узле СеМО.

Кортеж (1) описывает достаточно широкий класс замкнутых СеМО без потерь, без блокировок, со статическими приоритетами и консервативными дисциплинами обслуживания. Необходимо разработать метод приближенной оценки средних значений (математических ожиданий) времен пребывания заявок в узлах такой СеМО, учитывающий основное качественное свойство таких СеМО – конечность популяции заявок. Для расчета характеристик такого класса СеМО в настоящее время отсутствуют аналитические методы.

Решение задачи.

Суть предлагаемого метода состоит в декомпозиции исходной замкнутой СеМО, состоящей из L узлов, на совокупность из L замкнутых СМО типа модели ремонтника, неизвестные параметры которых связаны системой нелинейных уравнений баланса.

Для каждого узла ‘j’ СеМО его дополнение до сети (множество узлов L \ j) представляет собой источник заявок конечной емкости с неизвестной ФРВ времени пребывания заявок в этом источнике. При этом делаем предположение, что для каждого узла ‘j’ в СеМО время пребывания заявок в этом источнике имеет экспоненциальное распределение, а его математическое ожидание равно среднему времени пребывания заявок в дополнении до сети (в узлах L \ j) за время одного отсутствия заявки в узле ‘j’. В итоге исходная сеть S декомпозируется на L замкнутых СМО типа $M_R/GI_R/n//N_R$ в обозначениях Кендалла [7], т.е. на L замкнутых СМО типа модели ремонтника. Подобные замкнутые СМО достаточно хорошо изучены, см., например, [6]. Для целей нашего исследования назовем эти модели базовыми.

Система уравнений баланса.

Выделим в сети узел ‘j’ (j∈L), заметим какую-либо заявку класса ‘r’ (r∈R) и проследим процесс ее блуждания по той части сети, которая состоит из узлов L \ j, в течение интервалов времени между последовательными посещениями этой заявкой узла ‘j’. Случайное время от момента выхода меченой заявки класса ‘r’ из узла ‘j’ до момента ее первого возвращения в этот же узел назовем временем первого возвращения заявки класса ‘r’ в узел ‘j’ и обозначим его через A_{jr} . Это время суть также время отсутствия меченой заявки класса ‘r’ в узле ‘j’, либо, что то же самое, время пребывания меченой заявки в узлах L \ j за время одного отсутствия в узле ‘j’.

Изменив для удобства порядок суммирования, можем записать:

$$A_{lr} = \sum_{i\in(\mathrm{L}\setminus\mathrm{j})} \sum_{l_i=0}^{K_{ir}^{j}} V_{ir}^{l_i}\ , \quad V_{ir}^{l_i} = 0, \text{ если } l_i = 0, \text{ и } V_{ir}^{l_i} > 0, \text{ если } l_i > 0. \qquad (2).$$

Здесь:

$V_{ir}^{l_i}$ - время пребывания меченой заявки класса ‘r’ в узле ‘i’ при l_i-м его посещении в течение времени A_{lr}.

K_{ir}^{j} - число посещений меченой заявкой класса ‘r’ узла ‘i’ за время A_{lr}. K_{ir}^{j} суть случайная величина, не зависящая от $\{V_{ir}^{l_i}\}$ и принимающая значения 0,1,2,….

Переходя к средним значениям и используя теорему Колмогорова-Прохорова [8, с.188], получим из (2):

$$a_{jr} = \sum_{i\in(L\setminus j)} k_{ir}^{j} v_{ir} \qquad (3).$$

Здесь a_{jr}, k_{ir}^{j} и v_{ir} суть математические ожидания случайных величин A_{lr}, K_{ir}^{j} и $V_{ir}^{l_i}$ соответственно.

Величину k_{ir}^{j} - среднее число посещений меченой заявкой класса ‘r’ узда ‘i’, приходящееся на одно посещение узла ‘j’, определим следующим образом.

Благодаря независимости k_{ir}^{j} от времен пребывания в узлах (k_{ir}^{j} зависит только от матриц P^r) можно утверждать, что значения k_{ir}^{j} для исходной сети S и для конечной цепи Маркова с множеством состояний L, матрицей переходов P^r и единичным временем пребывания в каждом состоянии будут совпадать.

Стационарные вероятности состояний такой цепи $\pi^r = (\pi_1^r, \pi_2^r, \ldots, \pi_i^r, \ldots, \pi_L^r)$ определяются решением системы линейных уравнений $\pi^r = \pi^r P^r$, в которой одно из уравнений заменим условием нормировки $\sum_{i=1}^{L} \pi_i^r = 1$.

Рассмотрим процесс переходов в такой цепи в стационарном режиме. Пусть за достаточно большое время совершено N^r шагов, причем цепь побывала в состоянии ‘i’ (i∈L) N_i^r раз. Причем $\sum_{i=1}^{L} N_i^r = N^r$. Число пребываний цепи в состоянии “i” в расчете на одно пребывание в состоянии “j” равно N_i^r / N_j^r. Нетрудно видеть, что

$$k_{ir}^j = \lim_{N^r \to \infty} (N_i^r / N_j^r) = \lim_{N^r \to \infty} (N_i^r / N^r) / \lim_{N^r \to \infty} (N_j^r / N^r) = \pi_i^r / \pi_j^r \qquad (4).$$

Подставляя (4) в (3) получим:

$$a_{jr} = \sum_{i \in \mathrm{L} \setminus \mathrm{j}} (\pi_i^r / \pi_j^r) v_{ir}, \; j \in [1,,,, L], r \in [1,..., R] \qquad (5).$$

Заметим, что (5) впервые было приведено в работе [9] без доказательства.

Сделаем допущение о том, что A_{jr} распределено по экспоненциальному закону с параметром $\lambda_{jr} = a_{jr}^{-1}$.

Это означает замену дополнения узла ‘j’ до сети источником конечной емкости с экспоненциальным распределением времени пребывания в источнике, причем средние времена пребывания заявок всех классов в источнике и в дополнении узла “j” до сети совпадают (5). Таким образом мы декомпозируем исходную сеть на совокупность из L базовых замкнутых СМО типа модели ремонтника, неизвестные параметры ($\lambda_{jr} = a_{jr}^{-1}$) источников которых связаны системой нелинейных уравнений (5) размерностью $L \; x \; R$.

Нетрудно видеть, что при известных ФРВ времен обслуживания в каждом узле сети времена $v_{ir} (i = 1,..., L; r = 1,..., R)$ полностью определяются пока неизвестными параметрами $a_{ir} (i = 1,..., L; r = 1,..., R)$, количество которых равно количеству уравнений.

Система (5) будет полностью определена, если нам известны для всех узлов сети зависимости: $v_{ir} = \vartheta_{ir}(a_{i1}, a_{i2},..., a_{ir},..., a_{iR}), i \in [1,..., L]; r \in [1,..., R]$, (6)

позволяющие вычислять значения средних времен пребывания заявок каждого класса в узлах сети.

Используя (6), систему (5) можно представить относительно неизвестных v_{ir} в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} v_{ir} &= \vartheta_{ir}(a_{i1}, a_{i2},..., a_{ir},..., a_{iR}) \\ a_{ir} &= \sum_{\mathrm{j} \in (L \setminus i)} (\pi_j^r / \pi_i^r) v_{jr}, \end{aligned}\right\} i \in [1,..., L], r \in [1,..., R] \qquad (7)$$

После подстановки выражений для a_{ir} из второго уравнения в первое, получим из (7) в векторной форме:

$$\nu = \tilde{\vartheta}(\nu) \qquad (8)$$

Где $\nu = (\nu_{11},\dots,\nu_{1R},\nu_{21},\dots,\nu_{2R},\dots,\nu_{i1},\dots,\nu_{iR},\dots,\nu_{L1},\dots,\nu_{LR})$,

оператор $\tilde{\vartheta} = (\tilde{\vartheta}_{11},\dots,\tilde{\vartheta}_{1R},\dots,\tilde{\vartheta}_{L1},\dots,\tilde{\vartheta}_{LR})$ суть -отображение $R_{+}^{lR} \to R_{+}^{LR}$

$\nu_{ir} = \tilde{\vartheta}_{ir}(\nu), \quad i=1,\dots,L, \quad r=1,\dots,R$

Или $\varphi(\nu) = \tilde{\vartheta}(\nu) - \nu = 0$, (9)

что эквивалентно (7) и (8).

В силу сложности выражений для оператора $\tilde{\vartheta}$ решение следует искать среди итерационных методов.

При отыскании решения (8,9) возникают три проблемы [10], а именно:

1. Доказательство существования решения системы уравнений;
2. Конструирование метода отыскания решения;
3. Доказательство сходимости метода.

Докажем, что решение системы уравнений (8) существует.

Обозначим область определения оператора $\tilde{\vartheta}$ через ***B:***

$B = \{\nu\} \subset R_{+}^{LR}$ такое, что $\forall i(i \in \mathrm{L}) \wedge \forall r(r \in R)$ имеет место $(b_{ir} \le \nu_{ir} \le \overline{\nu}_{ir})$, где

$$\begin{Bmatrix} b_{ir} - \text{среднее время обслуживания заявки класса i в узле r,} \\ \overline{\nu}_{ir} = \vartheta_{ir}(\underline{a}_{i1},\underline{a}_{i2},\dots,\underline{a}_{ir},\dots,\underline{a}_{iR}) \\ \underline{a}_{ir} = \sum\limits_{j \in L, j \ne i} (\pi_j^r / \pi_i^r) b_{jr}, \ \text{i=1}, L, \text{ r=1,R.} \end{Bmatrix} \qquad (10)$$

Таким образом ***B*** есть параллелепипед, т.е. выпуклое замкнутое множество в R_{+}^{LR}.

Нетрудно видеть, что имеет место следующее свойство:

$$\forall i(i \in L)\forall j(j \in L)\forall r(r \in R)\exists k(k \in R)[(i \neq j) \rightarrow (\frac{\partial \tilde{\vartheta}_{ir}}{\partial \nu_{jk}} < 0)] \qquad (11)$$

Более того, учитывая замкнутость СеМО, можно утверждать, что зависимости

$\nu_{ir} = \vartheta_{ir}(a_{ik})$ и $\nu_{ir} = \tilde{\vartheta}_{ir}(\nu_{jk})$ имеют гиперболический характер, см.рис.1 и 2.

Из (11) следует, что

$$\forall i(i \in L)\forall j(j \in L)\forall k(k \in R)[(i \neq j) \wedge (b_{ir} \leq \nu_{ir} \leq \overline{\nu}_{ir})] \rightarrow (b_{jk} < \nu_{jk} \leq \nu_{jk}) \qquad (12)$$

Что означает существование в СеМО узлов с ненулевыми средними значениями времен ожидания.

Из (12) следует, что $\tilde{\vartheta}(B) \subset B$, т.е. оператор $\tilde{\vartheta}$ отображает множество В в себя, причем имеет место строгое включение.

Непрерывность отображения $\tilde{\vartheta}:\ B \rightarrow B$ следует из непрерывности функций (5(и (6).

Следовательно оператор $\tilde{\vartheta}$ удовлетворяет на В условиям теоремы Брауэра [11], т.е. имеет в В неподвижную точку ν^{*}, которая и есть решение системы уравнений (8). Что и требовалось доказать.

Монотонность функций $\nu_{ir} = \vartheta_{ir}(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ir}, ..., a_{iR})$ по каждой из переменных a_{ir} и аддитивный характер зависимости $a_{ir} = \sum_{j \in (L \setminus i)} (\pi_j^r / \pi_i^r)\nu_{jr}$ дают основание полагать, что решение системы (8) единственное. Однако вопрос доказательства единственности решения пока остается открытым.

Конструирование метода решения системы уравнений (8).

В [9] для решения подобного типа уравнений предлагается метод простых итераций, а качестве начального приближения используется вектор средних значений времен обслуживания заявок в узлах:

$$\nu_0 = (b_{11}, ..., b_{1R}, b_{21}, ..., b_{2R}, ..., b_{i1}, ..., b_{iR}, ..., b_{L1}, ..., b_{LR})$$

При этом ошибочно утверждается, что итерационный процесс $\nu_k = \tilde{\vartheta}(\nu_{k-1}), k = 1, 2, 3, ...$ сходится в общем случае, а достаточным условием сходимости является выполнение условий:

1). $\frac{\partial \vartheta_{ir}}{\partial a_{jk}} < 0$ - монотонное убывание v_{ir} от a_{jk} и

2). $\frac{\partial^2 \vartheta_{ir}}{\partial^2 a_{jk}} \neq 0$ - отсутствие точек перегиба по a_{jk} .

Покажем, что $l_{-\infty}$ норма [10] матрицы Якоби [**J**] для оператора $\tilde{\vartheta}$ уравнения (8) может быть больше 1.

Действительно

$$\|J\|_\infty = \left\| \left[\frac{\partial \tilde{\vartheta}_{ir}}{\partial v_{jk}} \right]_{LRxLR} \right\|_\infty = \left\| \left[\frac{\partial \tilde{\vartheta}_{ir}}{\partial a_{ik}} \frac{\partial a_{ik}}{\partial v_{jk}} \right]_{LRxLR} \right\|_\infty , i,\ j = 1,\ldots, L, \quad r, k = 1,\ldots, R$$

Для базовых СМО с абсолютными приоритетами имеем:

$$\forall k \forall r (k, r = 1,\ldots, R) \ \left[(k > r) \to (\frac{\partial \vartheta_{ir}}{\partial a_{ik}} = 0) \right] \wedge \left[(k \le r) \to (-\infty < \frac{\partial \vartheta_{ir}}{\partial a_{ik}} < 0) \right], \tag{13}$$

Для базовых СМО всех остальных типов имеем:

$$\forall k \forall r (k, r = 1,\ldots, R) \quad (-\infty < \frac{\partial \vartheta_{ir}}{\partial a_{ik}} < 0) \tag{14}$$

Кроме того, принимая во внимание (5), имеем:

$$\forall j (j = 1,\ldots, L) \forall k (k = 1,\ldots, R) \ \left[(i = j) \to (\frac{\partial a_{ik}}{\partial v_{jk}} = 0) \right] \wedge \left[(i \neq j) \to (\frac{\partial a_{ik}}{\partial v_{jk}} = \frac{\pi_j^k}{\pi_i^k}) \right] \tag{15}$$

Поскольку, в силу (6) и (14), справедливо

$\forall i (i = 1,\ldots, L) \exists k (k = 1,\ldots, R) \forall r (r = 1,\ldots, R) \ (\frac{\partial \vartheta_{ir}}{\partial a_{ji}} < 0)$ и всегда найдется такая матрица $\mathrm{P}^r = [\mathrm{p}_{ij}^r]_{LxL}$, что будет иметь место следующее соотношение, означающее наличие в СеМО для заявок приоритета k «редко» посещаемого узла j:

$(\frac{\pi_i^k}{\pi_j^k}) > \left| \frac{\partial \vartheta_{ir}}{\partial a_{ik}} \right|^{-1}$. А это значит, что норма $\|J\|_\infty > 1$ и, следовательно, не выполняются достаточные условия сходимости метода простых итераций [12] для уравнения (8). Таким образом, для нахождения решения системы уравнений (8) необходимо использовать итерационный метод более «высокого» порядка.

Метод решения системы нелинейных уравнений (8).

Из того факта, что система (8) эквивалентна системе (9), а также из монотонности и выпуклости зависимостей $\nu_{ir} = \tilde{\vartheta}_{ir}(\nu_{jk})$ и линейного аддитивного характера зависимости (5), следует, что оператор $\varphi(\nu) = \tilde{\vartheta}(\nu) - \nu = 0$ удовлетворяет на $\boldsymbol{B}$ условиям теоремы Канторовича [12, с.491].

Таким образом, для нахождения решения системы уравнений (9) и эквивалентной ей системы (8) можно применить метод Ньютона-Канторовича [13], использующий обращение матрицы производных Фреше оператора $\varphi(\nu)$ и обеспечивающий быструю (квадратичную) сходимость:

$\nu_{n+1} = \nu_n - \left[\varphi'(\nu_n)\right]^{-1} \varphi(\nu_n), \quad n = 0,1,2,...$ здесь $\varphi'(\nu_n)$ - производная Фреше. (16)

Учитывая тот факт, что основные затраты машинного времени приходятся на вычисление обратной матрицы $\left[\varphi'(\nu_n)\right]^{-1}$, для сокращения времени решения лучше использовать модификацию метода, при которой обратная матрица вычисляется только на первой итерации:

$$\tilde{\nu}_{n+1} = \tilde{\nu}_n - \left[\varphi'(\nu_0)\right]^{-1} \varphi(\tilde{\nu}_n), \quad n = 0,1,2,... \tag{17}$$

При этом последовательности ν_n и $\tilde{\nu}_n$ $n = 0,1,2,...$сходятся к одному и тому же решению ν^*.

Процесс поиска приближения к решению ν^* начинается с начального значения вектора ν_0, в качестве которого выбираем вектор средних времен обслуживания заявок в узлах:

$$\nu_0 = (b_{11},...,b_{1R},b_{21},...,b_{2R},...,b_{i1},...,b_{iR},...,b_{L1},...,b_{LR}).$$

Заканчивается итерационный процесс по достижении заданной точности ε, когда норма

$\left\|\nu_{n+1} - \nu_n\right\|_\infty < \varepsilon, \quad \mathrm{n} = 0,1,2,...$, где n – номер итерации.

Заключение.

1. Разработан декомпозиционный итерационный метод оценки средних значений времен пребывания заявок в узлах для широкого класса замкнутых сетей массового обслуживания с приоритетами и консервативными дисциплинами обслуживания, основанный на

декомпозиции исходной сети на совокупность замкнутых СМО типа модели ремонтника, параметры которых связаны системой нелинейных уравнений баланса.

2. Доказаны существование решения такой системы уравнений, а также невозможность гарантированного получения решения методом простых итераций.

3. Обосновано, что в качестве метода решения полученной системы уравнений баланса следует использовать модифицированный метод Ньютона-Канторовича, обеспечивающий быструю сходимость итерационной процедуры.

4. Возможности данного метода ограничены перечнем известных на сегодня аналитических или численных решений для моделей типа модели ремонтника [6], а также возможностями численного решения нелинейных уравнений типа (8) и (9). Метод Ньютона-Канторовича основан на обращении матриц, что поддерживается, например, в таких программных системах как MatLab и MathCAD.

Список литературы

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 400 с.

2. Бронштейн О.И., Духовный И.М. Модели приоритетного обслуживания в информационно-вычислительных системах. М.: Наука, 1976. 220 с.

3. Башарин Г.П., Бочаров П.П., Коган Я.А. Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчета. М.: Наука, 1989. 336 с.

4. Баканов А.С., Вишневский В.М., Ляхов А.И. Метод оценки показателей производительности беспроводных сетей с централизованным управлением // Автоматика и телемеханика. 2000. № 4. С. 97-105.

5. Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. М.: Техносфера, 2003. 512 с.

6. Джейсуол Н. Очереди с приоритетами: пер. с англ. М.: Мир, 1973. 280 с.

7. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания: пер. с англ. М.: Машиностроение, 1979. 432 с.

8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1962. 400 с.

9. Дмитриев В.И., Милевски Е. Итерационный метод расчета замкнутой многофазной системы массового обслуживания с приоритетами и вероятностным прохождением фаз запросами // Труды МЭИ. 1979. Вып. 419. С. 79-83.

10. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными: пер. с англ. М.: Мир, 1975. 558 с.

11. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.

12. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2 т. Т. 1. М.: Наука, 1966. 632 с.

13. Бахвалов Н.С. Численные методы. Т.1. М.: Наука, 1973. 636 с.

14. Bolch G., Greiner S., de Meer H., Trivedi K.S. Queuing Networks and Markov Chains. John Wiley and Sons, 1998.

15. Harrison J.M., Williams R.J. A multiclass closed queueing network wirh unconventional heavy traffic behavior. IMA Preprint Series no.1321. July 1995.

16. Jensen P.A. Closed Queueing Networks. Режим доступа: http://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/computation/unit/que_add/closed_queue.pdf (дата обращения 31.01.2014).

17. Mayers D. CS 547 Lecture 20: Closed Queueing Networks. Режим доступа: http://pages.cs.wisc.edu/~dsmyers/cs547/lecture_20_closed_networks.pdf. (дата обращения 31.01. 2014).

18. Bose S.K. Open and Closed Networks of M/M/m Type Queues (Jackson’s Theorem for Open and Closed Networks). Copyright 2002. Режим доступа: https://www.iitg.ernet.in/skbose/qbook/Slide_Set_14.pdf (дата обращения 31.01. 2014).

19. Raj Jain. Queueing Networks. Washington University in St. Louis. 2008. Режим доступа: http://www.cse.wustl.edu/~jain/cse567-08/ftp/k_32qn.pdf (дата обращения 31.01. 2014).

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Decomposition method for analysis of closed queuing networks

02, February 2014

DOI: 10.7463/0214.0700018

Yu.G. Nesterov

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

ugn@bmstu.ru

This article deals with the method to estimate the average residence time in nodes of closed queuing networks with priorities and a wide range of conservative disciplines to be served. The method is based on a decomposition of entire closed queuing network into a set of simple basic queuing systems such as M|GI|m|N for each node. The unknown average residence times in the network nodes are interrelated through a system of nonlinear equations. The fact that there is a solution of this system has been proved. An iterative procedure based on Newton-Kantorovich method is proposed for finding the solution of such system. This procedure provides fast convergence to solution. Today possibilities of proposed method are limited by known analytical solutions for simple basic queuing systems of M|GI|m|N type.

Publications with keywords: queueing network, queueing system, queue, facility, service time, waiting time, residence time, absence time, stochastic matrix, Markov chain

Publications with words: queueing network, queueing system, queue, facility, service time, waiting time, residence time, absence time, stochastic matrix, Markov chain

References

1. Gnedenko B.V., Kovalenko I.N. *Vvedenie v teoriiu massovogo obsluzhivaniia* [Introduction to queuing theory]. Moscow, LKI Publ., 2007. 400 p. (in Russian).

2. Bronshtein O.I., Dukhovnyi I.M. *Modeli prioritetnogo obsluzhivaniia v infor-matsionno-vychislitel'nykh sistemakh* [Model of the priority services in the information-computing systems]. Moscow, Nauka, 1976. 220 p. (in Russian).

3. Basharin G.P., Bocharov P.P., Kogan Ya.A. *Analiz ocheredey v vychislitel'nykh setyakh. Teoriya i metody rascheta* [Analysis of queues in computer networks. Theory and methods of calculation]. Moscow, Nauka, 1989. 336 p. (in Russian).

4. Bakanov A.S., Vishnevskiy V.M., Lyakhov A.I. [A method for evaluating performance of wireless communication networks with centralized control]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2000, no. 4, pp. 97-105. (English translation: *Automation and Remote Control*, 2000, vol. 61, no. 4, pp. 629-636.)

5. Vishnevskiy V.M. *Teoreticheskie osnovy proektirovaniya komp'yuternykh setey* [Theoretical bases of designing of computer networks]. Moscow, Tekhnosfera, 2003. 512 p. (in Russian).

6. Jaiswal N.K. *Priority Queues*. Academic Press, New York, 1968. (Russ. ed.: Jaiswal N. *Ocheredi s prioritetami*. Moscow, Mir, 1973. 280 p.).

7. Kleinrock L. *Queueing Systems. Vol. 1. Theory*. New York, John Wiley & Sons, 1975. (Russ. ed.: Kleinrock L. *Teoriia massovogo obsluzhivaniia*. Moscow, Mashinostroenie, 1979. 432 p.).

8. Gnedenko B.V. *Kurs teorii veroyatnostey* [Course on probability theory]. Moscow, Nauka, 1962. 400 p. (in Russian).

9. Dmitriev V.I., Milevskiy E. [An iterative method for calculating multiphase closed queuing system with priorities and probabilistic passing queries phase]. *Trudy MEI - Proceedings of MEI*, 1979, iss. 419, pp. 79-83. (in Russian).

10. Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, 1970. (Russ. ed.: Ortega J.M., Rheinboldt W.C. *Iteratsionnye metody resheniya nelineynykh sistem uravneniy so mnogimi neizvestnymi*. Moscow, Mir, 1975. 558 p.).

11. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka, 1980. 496 p. (in Russian).

12. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Metody vychisleniy. V 2 t. T. 1* [Computing methods. In 2 vols. Vol. 1]. Moscow, Nauka, 1966. 632 p. (in Russian).

13. Bakhvalov N.S. *Chislennye metody. T.1* [Numerical methods. Vol.1]. Moscow, Nauka, 1973. 636 p. (in Russian).

14. Bolch G., Greiner S., de Meer H., Trivedi K.S. *Queueing Networks and Markov Chains*. John Wiley and Sons, 1998.

15. Harrison J.M., Williams R.J. *A multiclass closed queueing network with unconventional heavy traffic behavior*. IMA Preprint Series no.1321. July 1995.

16. Jensen P.A. *Closed Queueing Networks*. Available at: http://www.me.utexas.edu/~jensen/ORMM/computation/unit/que_add/closed_queue.pdf , accessed 31.01. 2014.

17. Mayers D. *CS 547 Lecture 20: Closed Queueing Networks*. Available at: http://pages.cs.wisc.edu/~dsmyers/cs547/lecture_20_closed_networks.pdf , accessed 31.01. 2014.

18. Bose S.K. *Open and Closed Networks of M/M/m Type Queues (Jackson's Theorem for Open and Closed Networks)*. Copyright 2002. Available at: https://www.iitg.ernet.in/skbose/qbook/Slide_Set_14.pdf , accessed 31.01. 2014.

19. Raj Jain. *Queueing Networks*. Washington University in St. Louis. 2008. Available at: http://www.cse.wustl.edu/~jain/cse567-08/ftp/k_32qn.pdf , accessed 31.01. 2014.