

К вопросу об оценке равноточности и однородности нескольких групп измерений при их нормальном распределении в лабораторной работе по дисциплине «Прикладная метрология»

77-48211/656829

12, декабрь 2013

Крушняк Н. Т.

УДК 53.088

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

kozyr.ru@mail.ru

1 ВВЕДЕНИЕ

В измерительной практике часто встречаются задачи, когда необходимо обработать результаты нескольких групп измерений. При этом предварительно необходимо убедиться в том, что все группы измерений являются равноточными и однородными.

Для практического изучения способов оценки равноточности и однородности групп наблюдений студенты выполняют лабораторную работу по дисциплине «Прикладная метрология».

Объектом исследования является цилиндрический вал, на эскизе которого указаны измеряемый размер и его точность.

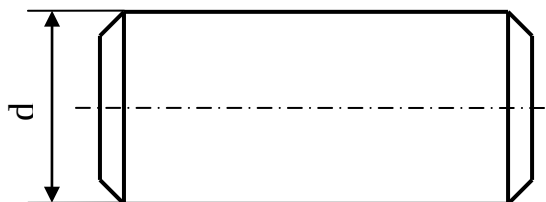


Рис. 1

Студенческая группа разбивается на подгруппы количеством 2 – 5 человек. Каждой подгруппе выдается задание.

Задания 1 и 2

- 1) В подгруппе каждому студенту провести многократные измерения ($n = 25 \dots 30$) диаметра вала на вертикальном длиномере и получить соответствующее число групп измерений.
- 2) Вычислить средние арифметические значения и дисперсии групп измерений.
- 3) В зависимости от числа групп измерений выбрать метод оценки равноточности и однородности групп.
- 4) Провести проверку равноточности групп измерений.
- 5) Провести проверку однородности групп измерений.

Задание 3

В случае равноточности и однородности групп измерений провести проверку соответствия всей совокупности экспериментальных данных нормальному закону распределения.

Задание 4

Если гипотеза о соответствии эмпирического закона распределения нормальному закону принимается, то провести математическую обработку результатов однородных равноточных групп измерений и вычислить результат измерений и доверительные границы его погрешности.

2 ПОНЯТИЕ О РАВНОТОЧНОСТИ И ОДНОРОДНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

При решении некоторых измерительных задач, например, при проведении измерений параллельно на нескольких приборах или несколькими операторами, возникает необходимость обработки нескольких групп измерений. Если характеристики погрешностей этих групп (оценки среднего квадратического отклонения и границы неисключенной систематической погрешности) одинаковы, то такие измерения являются

равноточными. Если эти характеристики различны, то измерения являются неравноточными.

В [1] дается определение равноточных измерений как ряда измерений какой-либо величины, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений в одних и тех же условиях с одинаковой тщательностью. Это определение носит описательный характер, но не позволяет на практике определить равноточность групп измерений.

Иногда действие отдельных факторов (прибора, оператора, условий измерения) бывает столь существенно, что приводит к появлению различных систематических погрешностей результатов измерений отдельных групп. Такие группы измерений называют неоднородными. Если различия в систематических погрешностях результатов измерений групп отсутствуют, то измерения являются однородными. В [1] не приводится определение однородных измерений.

Поэтому для проверки наличия различий в характеристиках погрешностей измерений отдельных групп наблюдений в данной лабораторной работе предлагается использовать математический аппарат проверки статистических гипотез [2].

3 ПОСТАНОВКА ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть мы имеем m групп измерений и в каждой группе содержится n_i наблюдений. Обозначим отдельные наблюдения через x_{ij} , где i - номер группы (i изменяется от 1 до m), j - номер наблюдения в группе (j изменяется от 1 до n_i).

Среднее арифметическое значение из n_i наблюдений в i -й группе равно:

$$\bar{x}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}}{n_i}.$$

Оценка дисперсии результатов наблюдений в i -й группе равна:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i - 1}.$$

Нас интересует, являются ли данные измерения равноточными, т.е. имеют ли все группы измерений одну и ту же дисперсию. Если дисперсии групп различны, то измерения неравноточны.

Для проверки однородности измерений необходимо определить различие систематических погрешностей результатов измерений отдельных групп. Различные систематические погрешности приводят к различию средних арифметических значений $\bar{x}_i$ групп. Если эти различия допустимы, то измерения являются однородными. Если эти различия значительны, то измерения неоднородны.

4 ПРОВЕРКА РАВНОТОЧНОСТИ ГРУПП ИЗМЕРЕНИЙ

Для определения равноточности нескольких групп измерений необходимо проверить статистическую гипотезу о допустимости различия между оценками дисперсии. Для этого формулируется нулевая гипотеза $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_m^2$. Проверка нулевой гипотезы выполняется с помощью критерия Р.Фишера в случае двух групп наблюдений и критерия М.Бартлетта, если групп больше.

Пусть имеются несмещенные оценки дисперсий двух групп S_1^2 и S_2^2 , причем $S_1^2 > S_2^2$. Число наблюдений в группах n_1 и n_2 , так что степени свободы равны соответственно $k_1 = (n_1 - 1)$ и $k_2 = (n_2 - 1)$.

Составляем отношение

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}.$$

Затем задаемся уровнем значимости q (обычно $q = 0,1 \dots 0,01$) и из таблицы распределения Р.Фишера для степеней свободы k_1 и k_2 выбираем значение $F_{q/2}$.

Гипотеза принимается, т.е. оценки дисперсий можно считать отвечающими одной и той же дисперсии, если выполняется неравенство

$$\frac{1}{F_{q/2}} \leq F \leq F_{q/2}.$$

Это означает, что группы измерений являются равноточными. Если значение F лежит за границами интервала $\left[\frac{1}{F_{q/2}}; F_{q/2} \right]$, то измерения неравноточны.

Теперь пусть у нас есть m групп и для них найдены $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ - несмещенные оценки дисперсий групп наблюдений ($m > 2$), каждая из которых имеет $k_i = (n_i - 1)$ степеней свободы, причем $k_i > 3$. Допустимость различий оценок дисперсии групп проверяют при помощи критерия М. Бартлетта, если число групп $m \geq 3$ и $n \geq 4$. Для этого вычисляют оценки дисперсий групп $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ и среднее значение этих оценок:

$$S_b^2 = \frac{1}{N - m} \sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2,$$

где $N = \sum_{i=1}^m n_i$ - общее число наблюдений во всех группах.

Затем находят значение χ^2 по формуле:

$$\chi^2 = \frac{2,303}{c} \sum_{i=1}^m (n_i - 1) \lg \frac{S_b^2}{S_i^2},$$

где $c = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left[\sum_{i=1}^m \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{N - m} \right]$.

Задаваясь уровнем значимости q , по таблице значений q -процентных точек для χ^2 - распределения определяют χ_q^2 с числом степеней свободы $k = (m - 1)$. Если $\chi^2 \leq \chi_q^2$, то различие между оценками дисперсий групп допустимы и данные группы измерений равноточны. При $\chi^2 > \chi_q^2$ измерения являются неравноточными.

5 ПРОВЕРКА ОДНОРОДНОСТИ ГРУПП ИЗМЕРЕНИЙ

Для определения однородности нескольких групп измерений необходимо проверить гипотезу о допустимости различия между средними арифметическими (результатами измерений) этих групп.

Рассмотрим сравнение средних арифметических для двух групп наблюдений. Обозначим через $\bar{x}_1$, S_1^2 , n_1 данные, относящиеся к одной группе, а через $\bar{x}_2$, S_2^2 , n_2 – ко второй.

Допустимость различия средних арифметических для двух групп наблюдений проверяют при помощи критерия Стьюдента. В этом случае вычисляется

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}.$$

Задаваясь уровнем значимости q , по таблице распределения Стьюдента при числе степеней свободы $k = (n_1 + n_2 - 2)$ и доверительной вероятности $P = (1 - q)$ находят t_q .

Различие между средними арифметическими считается допустимым, если

$$t \leq t_q.$$

В этом случае группы измерений однородны. При $t > t_q$ следует признать, что измерения неоднородны.

При большом числе групп ($m > 2$) допустимость различия между средними арифметическими проверяется с помощью дисперсионного анализа (критерия Р.Фишера).

Для этого выдвигают нулевую гипотезу $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$, согласно которой математические ожидания всех групп равны. Если проверяемая гипотеза верна, то, сопоставив средние значения в каждой группе, мы не должны получить значимого расхождения между ними, наоборот, если такое расхождение обнаружено, то нулевую гипотезу следует отбросить.

При дисперсионном анализе средние значения групп $\bar{x}_i$ сравниваются путем разбиения общей дисперсии S^2 на составляющие S_I^2 и S_{II}^2 , обусловленные рассеиванием между группами и рассеиванием внутри групп.

Для этого находят оценку межгрупповой дисперсии

$$S_I^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2,$$

где $\bar{x}_i$ - среднее арифметическое значение результатов наблюдений в i -й группе;

$\bar{x}$ - общее среднее арифметическое значение

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i;$$

$N = \sum_{i=1}^m n_i$ - общее число наблюдений.

Далее определяют среднее значение внутригрупповой дисперсии

$$S_{II}^2 = \frac{1}{N-m} \sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2,$$

где S_i^2 - оценка дисперсии результатов наблюдений в i -й группе.

Для проверки допустимости расхождения средних арифметических групп вычисляют критерий F:

$$F = \frac{S_I^2}{S_{II}^2}.$$

Критерий F следует распределению Р.Фишера с $k_1 = (m - 1)$ и $k_2 = (N - m)$ степенями свободы. Различие средних арифметических считают допустимым, если при выбранном уровне значимости q

$$\frac{1}{F_{q/2}} \leq F \leq F_{q/2}.$$

В этом случае измерения являются однородными.

Если значение $F = \frac{S_1^2}{S_{11}^2}$ находится вне интервала $\left[\frac{1}{F_{q/2}}; F_{q/2} \right]$ это озна-

чает, что между средними арифметическими групп имеются недопустимые смещения, которые не могут быть объяснены за счет действия случайных факторов. Поэтому нулевая гипотеза $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m$ должна быть отброшена. В этом случае измерения являются неоднородными.

Если в результате проведенных исследований установлено, что группы измерений являются равноточными и однородными, то это означает, что все результаты наблюдений принадлежат одной генеральной совокупности с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2 . Необходимо проверить гипотезу о том, что распределение экспериментальных данных не противоречит нормальному закону распределения. При числе экспериментальных данных $N \geq 50$ для проверки гипотезы о нормальности распределения можно использовать критерий согласия К.Пирсона (критерий χ^2). Идея этого метода состоит в контроле отклонений гистограммы экспериментальных данных от гистограммы с таким же числом интервалов, построенной на основе нормального распределения. Алгоритм расчета представлен в [3].

6 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ НЕСКОЛЬКИХ ОДНОРОДНЫХ РАВНОТОЧНЫХ ГРУПП ИЗМЕРЕНИЙ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

С целью совместной обработки результатов однородных равноточных групп измерений предварительно обрабатывают каждую группу. При этом получают результат измерений $\bar{x}_i$, среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений S_i и доверительную границу неисключенной систематической погрешности результата измерений отдельной группы $\theta_i(P)$.

Результат измерений $\bar{x}$ по m группам вычисляют по формуле

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^m n_i \bar{x}_i, \quad (1)$$

где n_i - число измерений в i -й группе;

$N = \sum_{i=1}^m n_i$ - общее число измерений в m группах.

Если группы содержат одинаковое число измерений $n_i = n$, то формула (1) упрощается

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{x}_i.$$

Среднее квадратическое отклонение результата измерения $S_{\bar{x}}$ вычисляют по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \left[\sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2 + \sum_{i=1}^m n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \right]},$$

где S_i - среднее квадратическое отклонение i -й группы измерений.

При равном числе измерений во всех группах $n_i = n$ среднее квадратическое отклонение результата измерения определяют по формуле

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{n-1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^m S_i^2 + \frac{1}{m(N-1)} \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \bar{x})^2}.$$

Доверительные границы случайной погрешности $\varepsilon(P)$ результата измерения вычисляют по формуле

$$\varepsilon(P) = t \cdot S_{\bar{x}}$$

где t - коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности P и числу степеней свободы $k = (N - m)$.

Если неисключенные систематические погрешности θ_i (или $\theta_i(P)$) результатов измерений $\bar{x}_i$ во всех группах одинаковы ($\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_m = \theta$), то границу неисключенной систематической погрешности результата

измерения $\bar{x}$ по m группам измерений принимают равной границе θ (или доверительной границе $\theta(P)$).

Доверительную границу $\Delta(P)$ погрешности результата измерения по группам измерений вычисляют по формуле:

$$\Delta(P) = K S_{\Sigma}, \quad (2)$$

где K – коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей; S_{Σ} – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерений

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\theta}^2 + S_{\bar{x}}^2},$$

где $S_{\theta} = \frac{\theta}{\sqrt{3}}$ – при равномерном законе распределения неисключенной систематической погрешности;

$$S_{\theta} = \frac{\theta}{Z_{P/2}} \quad - \quad \text{при нормальном законе распределения неисключенной}$$

систематической погрешности;

$Z_{P/2}$ – коэффициент, равный значению аргумента функции Лапласа при вероятности $P/2$.

Коэффициент K вычисляют по формуле

$$K = \frac{\varepsilon + \theta}{S_{\bar{x}} + S_{\theta}}.$$

В некоторых случаях составляющие общей погрешности могут отличаться друг от друга настолько, что одной из них можно пренебречь.

$$\text{Если } \frac{\theta}{S_{\bar{x}}} < 0,8, \text{ то в этом случае неисключенные систематические}$$

погрешности пренебрежимо малы по сравнению со случайными и погрешность результата измерения можно характеризовать только доверительными границами случайной погрешности

$$\Delta = \varepsilon.$$

При $\frac{\theta}{S_{\bar{x}}} > 8$ случайные погрешности пренебрежимо малы по сравнению с неисключенными систематическими погрешностями и погрешность результата измерения характеризуется границами неисключенной систематической погрешности

$$\Delta = \theta.$$

Если $0,8 \leq \frac{\theta}{S_{\bar{x}}} \leq 8$, то погрешность результата измерения содержит как случайные, так и неисключенные систематические погрешности. Границы полной погрешности в этом случае находят по формуле (2).

7 ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ОДНОРОДНЫХ НЕРАВНОТОЧНЫХ ГРУПП ИЗМЕРЕНИЙ

Если критерий проверки различия средних арифметических показал, что различия результатов измерений отдельных групп носят случайный характер и допустимы, но рассеивание средних квадратических отклонений значительно или различны неисключенные систематические погрешности результатов измерений групп, то группы называют неравноточными.

При совместной обработке результатов измерений нескольких неравноточных групп необходимо найти соответствующие группам веса p_i :

$$p_i = \frac{g_i}{\sum_{i=1}^m g_i},$$

где $g_i = \frac{1}{S_{\Sigma i}^2}$;

$S_{\Sigma i}^2 = S_{\bar{x}_i}^2 + S_{\theta_i}^2$ - оценка суммарной дисперсии результата измерения для i -й группы экспериментальных данных;

$S_{\bar{x}_i}$ - среднее квадратическое отклонение результата измерения i -й группы данных;

S_{g_i} - среднее квадратическое отклонение неисключенной систематической погрешности для i – й группы.

За результат измерения принимают среднее взвешенное:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m p_i \bar{x}_i .$$

Суммарное среднее квадратическое отклонение результата измерений $\bar{x}$ по m группам экспериментальных данных находят по формуле:

$$S_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m g_i}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{1}{S_{\Sigma i}^2}}} .$$

Доверительную границу погрешности результата измерений вычисляют по формуле:

$$\Delta(P) = t \cdot S_{\bar{x}} ,$$

где t – коэффициент Стьюдента, соответствующий доверительной вероятности P с числом степеней свободы $k = m (n_{\min} - 1)$, где $n_{\min}$ - наименьшее из n_i .

8 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты разработки теоретико-экспериментального подхода к оценке равноточности и однородности нескольких групп измерений с нормальным распределением. Для решения данной задачи использовался математический аппарат проверки статистических гипотез. Получены формулы для обработки результатов однородных равноточных и неравноточных групп измерений. При выполнении данной лабораторной работы студент получает навыки и умения выбора методов проверки статистических гипотез и их применения для решения метрологических задач.

Для контроля знаний, умений и навыков, приобретенных студентом в результате выполнения лабораторной работы, проводится защита работы по билетам с выставлением рейтинговых оценок от 5 баллов до 1 балла.

Пример оценочных средств для текущего контроля успеваемости

Билет № 1

Лаб. работа № 2-ПМ

1. Проверка равноточности нескольких групп измерений.
2. Задача. Определить однородность двух групп измерений вала (рис.2) по следующим результатам наблюдений.

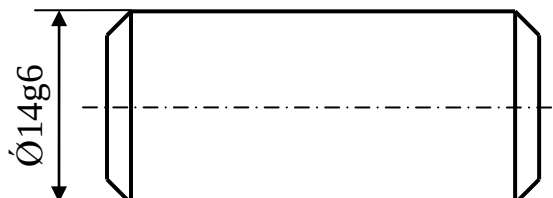


Рис. 2

Результаты наблюдений, мм			
1-я группа x_{1j}		2-я группа x_{2j}	
14,981		14,982	
14,980		14,983	
14,983		14,980	
14,981		14,981	
14,982		14,980	
		14,981	
		14,982	

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. РМГ 29-99. Рекомендации по межгосударственной стандартизации ГСИ. Основные термины и определения.
2. Н.Т. Полярус, В.П. Кузнецов, Е.И. Сычев, Ю.Ф. Томилев. Прикладная метрология. Архангельск: Изд-во АГТУ, 2002. 200 с.
3. М.Н. Селиванов, А.Э. Фридман. Качество измерений. Л.: Лениздат, 1987. 295 с.