Изложение курса кратных интегралов и теории поля на основе аддитивных функций

77-48211/624911

10, октябрь 2013

Соболев С. К.

УДК 517.37

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

sergesobolev@mail.ru

Введение. Наряду с линейностью, понятие аддитивности является фундаментальным в математике. Это понятие является плодотворным не только в теории вероятностей, но и в математическом анализе, в частности в курсах кратных, криволинейные интегралы и теории поля [2, 3]. Теория аддитивных функций множеств подробно изучается в теории меры [4, 5, 6], которая довольно сложна для изучения студентами инженерных, не математических специальностей. Тем не менее, некоторые понятия теории аддитивных функций довольно просты и главное, интуитивно понятны студентам технических вузов, и поэтому, на наш взгляд, заслуживают включения в программы модулей: «кратные интегралы», «криволинейные и поверхностные интегралы» и «теория поля», которые входят в программы общего курса математики почти всех инженерных специальностей. Тем более что важнейшим примером аддитивной функции множеств является вероятность события [8, 9], а теорию вероятностей изучают практически все студенты.

1. Аддитивные функции.

Напомним, что числовая функция $F(X)$, определенная на множествах из некоторого семейства Ψ (пока не уточняем, какого), называется *аддитивной*, если для любых непересекающихся множеств X и Y из Ψ для которых $(X \cup Y) \in \Psi$, справедливо равенство: $F(X \cup Y) = F(X) + F(Y)$. Отсюда следует, что для произвольных множеств $X, Y \in \Psi$ таких, что $(X \cup Y) \in \Psi$, $(X \cap Y) \in \Psi$:

$$F(X \cup Y) = F(X) + F(Y) - F(X \cap Y).$$

Аддитивная функция может быть определена: на одномерных множествах – подмножествах некоторой прямой или кривой, на двумерных – подмножествах плоскости или поверхности, и на трехмерных телах.

Примеры аддитивных функций множеств:

1) **Мера** фигуры (длина, площадь, объём); эта аддитивная функция принимает только неотрицательные значения.

2) Масса (полный заряд) материального тела X .

Очевидно также, что любая линейная комбинация аддитивных функций также аддитивна.

Множества, на которых мы будем рассматривать аддитивные функции, являются элементами некоторого семейства Ψ подмножеств некоторого универсального множества Ω . Множества этого семейства замкнуты относительно теоретико-множественных операций пересечения, объединения и дополнения, т.е. образуют **алгебру множеств**. Если эти пересечения и объединения можно брать и в счетном числе, то семейство Ψ называется **сигма-алгеброй**.

В теории вероятностей сигма-алгебра – это алгебра **случайных событий**, которые являются подмножествами универсума Ω – пространства элементарных исходов, которое само трактуют как достоверное событие. **Вероятность** события $X \in \Psi(\Omega)$ – это аддитивная функция $P(X)$, такая, что $P(X) \geq 0$ и $P(\Omega) = 1$.

Пусть числовая функция $f(x)$ точки x определена на множестве D . Считаем известным понятия интеграла от функции $f(x)$ по множеству $D \subset \mathbf{R}^n$, который мы обозначим: $F(D) = \int_D f(x) d\mu(x)$. Важнейшие частные случаи:

1) **определенный интеграл** $\int_a^b f(x) dx$, если $D = [a; b]$.

2) **двойной интеграл** $\iint_D f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$, если D – плоская двумерная область,

$D \subset \mathbf{R}^2$.

3) **тройной интеграл** $\iiint_D f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3$, если D – трехмерное тело,

$D \subset \mathbf{R}^3$;

4) (криво)линейный интеграл первого рода $\int_L f(x)dl(x)$, если $D = L$ – плоская

или пространственная неориентированная линия;

5) поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\Sigma} f(x)dS(x)$, если $D = \Sigma$ – некоторая

поверхность в пространстве.

Каждый из этих интегралов является аддитивной функцией области интегрирования, т.е. если зафиксировать функцию $f(x)$, то

$$F(X) = \int_X f(x)d\mu(x)$$

– аддитивная функция множества X .

Для каждого из этих интегралов справедливы такие теоремы:

1. Свойство линейности:

$$\int_D (\alpha f(x) + \beta g(x))d\mu(x) = \alpha \int_D f(x)d\mu(x) + \beta \int_D g(x)d\mu(x);$$

2. Теорема об интеграле от константы:

$$\int_D C \cdot d\mu(x) = C \cdot \mu(D),$$

где $\mu(D)$ – *мера* (длина, площадь, объём) области D .

3. Теорема об оценке: Если $g(x) \geq 0$ и $m_1 \leq f(x) \leq m_2$ для всех $x \in D$, то

$$m_1 \int_D g(x)d\mu(x) \leq \int_D f(x) \cdot g(x) \cdot d\mu(x) \leq m_2 \int_D g(x)d\mu(x),$$

в частности, если $g(x) \equiv 1$, то:

$$m_1 \cdot \mu(D) \leq \int_D f(x)d\mu(x) \leq m_2 \cdot \mu(D).$$

4. Теорема о среднем. Если область D замкнута, ограничена и связна, а функция $f(x)$ непрерывна на D , то найдется точка $x_0 \in D$, такая, что

$$\int_D f(x)d\mu(x) = f(x_0) \cdot \mu(D).$$

Замечание. Величина $\hat{f}|_D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu(D)} \int_D f(x)d\mu(x)$ называется *средним значением*

функции $f(x)$ на множестве D . Тогда теорему о среднем можно переформулировать так:

Если область D замкнута, ограничена и связна, а функция $f(x)$ непрерывна на D , то найдется точка $x_0 \in D$, значение функции в которой совпадает со средним значением на области D .

Для аддитивных функций множеств $F(X)$, $X \in \Psi(D)$, где $\Psi(D)$ – сигма-алгебра множеств – подмножеств множества D , на которых определена мера $\mu(X)$, вводится следующее естественное понятие **плотности функции** $F(X)$ в данной точке x_0 :

$$f(x_0) = \frac{dF}{d\mu}(x_0) = \lim_{\text{def } X \rightarrow x_0} \frac{F(X)}{\mu(X)},$$

где запись $X \rightarrow x_0$ означает, что область X **стягивается к точке** x_0 , а именно, что одновременно: $x_0 \in X$, $d(X) \rightarrow 0$, $X \in \Psi(D)$, где $d(X)$ – диаметр множества X .

Плотность аддитивной функции множеств – это уже функция точки. Очевидно, что если $F(X) = \mu(X)$, то $\frac{dF}{d\mu}(x) = 1$ в любой точке x .

Замечание. В принципе, аддитивная функция множеств может принимать не только скалярные, но и векторные значения. В этом случае её плотность также есть векторная величина той же размерности.

Теорема 1 (теорема о плотности интеграла по переменной области). Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $F(X) = \int_X f(x)d\mu(x)$, то

$$\frac{dF}{d\mu}(x_0) = f(x_0).$$

Функция множеств $F(X)$ называется **абсолютно непрерывной** относительно меры μ на области D , если $\mu(X) \rightarrow 0 \Rightarrow F(X) \rightarrow 0$ для $X \in \Psi(D)$. На языке эпсилон – дельта это означает, что

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) (\forall X \in \Psi(D)) (\mu(X) < \delta \Rightarrow F(X) < \varepsilon).$$

Если аддитивная функция задана интегралом от непрерывной функции, то она абсолютно непрерывна.

Вот еще интересный пример аддитивной функции (но не абсолютно непрерывной) функции множеств: пусть в пространстве расположено конечное число точек $a_1, a_2, \dots, a_n$. Положим для любого множества X :

$$F(X) = \{\text{количество точек } x_i, \text{ попавших в множество } X\}. \text{ Очевидно, что это}$$

аддитивная функция, её можно представить как сумму индикаторных функций отдельных точек:

$$\Phi_i(X) = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i \in X, \\ 0, & \text{если } a_i \notin X. \end{cases}$$

Аддитивные функции такого рода называются **сингулярными**. Эти аддитивные функции не имеют плотностей в обычном смысле. (На самом деле, плотность индикаторной функции точки a_0 есть **обобщенная функция**, а именно, **дельта-функция**, $\delta_{a_0}(x)$ сосредоточенная в точке a_0). Интуитивно, дельта-функция описывается равенствами:

$$\delta_{a_0}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq a_0, \\ \infty, & \text{если } x = a_0; \end{cases} \quad \int_D \delta_{a_0}(x) d\mu(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in D, \\ 0, & \text{если } x \notin D. \end{cases}$$

Хотя дельта-функция и играет большую роль в теории поля, в частности, в описании точечных зарядов, мы далее в настоящей заметке не будем останавливаться на ней, как и на сингулярных аддитивных функциях.

Для аддитивных функций справедливы аналоги теорем Ролля, Лагранжа и Коши.

Теорема 2 (теорема Ролля для аддитивной функции множества): *если область D связна, замкнута и ограничена, а функция множеств $F(X)$ абсолютно непрерывна на D , имеет плотность во всех её точках и $F(D) = 0$, то найдется точка $x_0 \in D$ такая, что $\frac{dF}{d\mu}(x_0) = 0$.*

Справедлива также:

Теорема 3 (теорема Коши для аддитивных функций множеств): *если область D связна, замкнута и ограничена, а функции множеств $F(X)$ и $G(X)$ абсолютно непрерывны на D и имеют плотности соответственно $f(x)$ и $g(x)$ во всех её точках, то найдется точка $x_0 \in D$ такая, что*

$$F(D) \cdot g(x_0) = G(D) \cdot f(x_0). \quad (1)$$

В частности, если $g(x) \neq 0$ во всех точках $x \in D$, то равенство (1) можно переписать так:

$$\frac{F(D)}{G(D)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Доказательство состоит в применении теоремы Ролля ко вспомогательной аддитивной функции $H(X) = F(D) \cdot G(X) - G(D) \cdot F(X)$.

Следствие 4 (теорема Лагранжа для аддитивной функции множества). Если область D связна, замкнута и ограничена, а функция множеств $F(X)$ абсолютно непрерывна на D и имеет плотность $f(x)$ во всех её точках, то найдется точка $x_0 \in D$ такая, что $F(D) = f(x_0) \cdot \mu(D)$.

(Надо взять в теореме Коши $g(X) = \mu(X)$)

Следствие 5. Если область D связна, замкнута и ограничена, а функции множеств $F(X)$ и $G(X)$ абсолютно непрерывны на D и имеют равные плотности $\frac{dF}{d\mu}(x) = \frac{dG}{d\mu}(x)$ во всех точках $x \in D$, то $F(D) = G(D)$.

Доказательство. Надо применить теорему Лагранжа к разности $H(X) = F(X) - G(X)$.

Теорема 6 (Формула Ньютона – Лейбница для интеграла от плотности): Если область D связна, замкнута и ограничена, а функция множеств $F(X)$ абсолютно непрерывна на D и имеет плотность $f(x)$ во всех её точках, то

$$\int_D f(x) d\mu(x) = F(D).$$

Доказательство. Рассмотрим $\Phi(X) = \int_X f(x) d\mu(x)$, тогда, по теореме,

$$\frac{d\Phi}{d\mu}(x) = f(x) = \frac{dF}{d\mu}. \text{ Но тогда, по следствию 5 из теоремы Лагранжа,}$$

$$\int_D f(x) d\mu(x) = \Phi(D) = F(D).$$

2. Общая формула для вычисления интегралов

Сначала приведем одну теорему из теории матриц.

Теорема 7. Пусть A – произвольная прямоугольная матрица. Тогда матрица $B = A^T A$ квадратная и симметричная с неотрицательным определителем, её ранг равен рангу матрицы A , а квадратичная форма с матрицей B неотрицательно определена.

Доказательство. В самом деле, если матрица A имеет размер $n \times k$, то матрица B имеет размер $k \times k$ и $B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B$. Квадратичная форма $f(x)$ с матрицей B может быть записана в виде:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{B} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = (\mathbf{A} \mathbf{X})^T (\mathbf{A} \mathbf{X}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = y_1^2 + \dots + y_n^2 \geq 0,$$

где $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{X} = (y_1, \dots, y_n)^T$. В некотором ортонормированном базисе эта квадратичная форма имеет канонический вид, т.е. её матрица диагональная $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ с неотрицательными числами λ_i на диагонали, тогда $B = Q D Q^T$, Q – ортогональная матрица перехода, и

$$\det(B) = \det(Q Q^T) \cdot \det(D) = 1 \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n \geq 0.$$

Матрица $B = A^T A$ есть матрица Грама векторов – столбцов матрицы A , и поэтому $\text{rg}(B) = \text{rg}(A)$.

Следствие 8. Если матрица A имеет размер $n \times k$ и $n < k$, то $\det(A^T A) = 0$.

Доказательство. Матрица $B = A^T A$ имеет порядок k и тогда

$$\text{rg}(B) = \text{rg}(A) \leq n < k \Rightarrow \det(B) = 0.$$

Пусть $\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x})$ где $\mathbf{x} = (x_1; \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ – дифференцируемое векторное отображение. Рассмотрим матрицу Якоби этого отображения:

$$D_\varphi = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_k} \end{pmatrix} \text{ размером } n \times k$$

Якобианом отображения $\varphi: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ назовем величину

$$J_\varphi = \sqrt{\det(D_\varphi^T \cdot D_\varphi)}$$

Это определение корректно, т.к. под корнем, согласно теореме 7, стоит неотрицательное выражение.

Очевидно, что если $k > n$, то в силу следствия 8, $J_\varphi \equiv 0$. В случае, когда $k = n$, имеем:

$$J_\varphi = \sqrt{\det(D_\varphi^T D_\varphi)} = \sqrt{\det(D_\varphi^T) \det(D_\varphi)} = \sqrt{(\det(D_\varphi))^2} = |\det D_\varphi|$$

и якобиан приобретает знакомый вид.

Замечание. Матрица $D_\varphi^T D_\varphi$ – это матрица Грама векторов – столбцов матрицы Якоби D_φ , и поэтому $J_\varphi = \sqrt{\det(D_\varphi^T D_\varphi)}$ равен объему k -мерного параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Вид якобиана в простейших случаях:

1) $k = n = 2$ или $k = n = 3$ – это замена переменных на плоскости или в пространстве, $J_\varphi = |\det(D_\varphi)|$.

2) $k = 1, n = 2$ – параметрическое задание линии на плоскости или в пространстве. $x = x(t), y = y(t)$, тогда

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix} \Rightarrow J_\varphi = \sqrt{D_\varphi^T D_\varphi} = \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2}. \text{ Аналогично при } n = 3.$$

3) $k = 2, n = 3$ – параметрическое задание поверхности в пространстве $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$. Тогда

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \\ z'_u & z'_v \end{pmatrix}, \text{ тогда } D_\varphi^T D_\varphi = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix},$$

$$\text{где } E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2,$$

$$F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \text{ и } J_\varphi = \sqrt{EG - F^2}.$$

Теорема 9. (общая формула для вычисления интегралов). Пусть $\varphi : D_1 \rightarrow D_2$ осуществляет непрерывно дифференцируемое взаимно однозначное отображение области $D_1 \subset \mathbf{R}^k$ на область $D_2 \subset \mathbf{R}^n$, и якобиан отображения отличен от нуля всюду на D_1 за исключением точек меры нуль. Тогда

$$\int_{D_2} f(y) d\mu(y) = \int_{D_1} f(\varphi(x)) \cdot J_\varphi \cdot d\mu(x). \quad (2)$$

Основные частные случаи. Если отображение $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ осуществляет замену

координат на плоскости: $x = x(u, v), y = y(u, v)$, то $J_\varphi = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \end{pmatrix} \right|$, получается

обычная формула замены координат в двойном интеграле

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot J_\varphi \cdot du dv$$

Алогично при $k = n = 3$.

Если же $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$ есть параметризация кривой в пространстве:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha; \beta],$$

то формула (2) принимает вид:

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt$$

– известная формула для вычисления криволинейного интеграла (первого рода).

Наконец, если $\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ осуществляет параметрическое задание поверхности Σ :

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), (u, v) \in D_{uv},$$

получаем знакомую формулу для вычисления поверхностного интеграла (первого рода) по поверхности, заданной параметрически:

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2} dudv.$$

Геометрический смысл Якобиана отображения $\varphi: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$.

Определим для множеств $X \subset \mathbf{R}^k$ функцию $\Phi(X) = \underset{def}{\mu(\varphi(X))}$. Эта функция

аддитивна, поскольку φ взаимно однозначна: если $X \cap Y = \emptyset$, то $\varphi(X) \cap \varphi(Y) = \emptyset$ и тогда

$$\begin{aligned} \Phi(X \cup Y) &= \mu(\varphi(X \cup Y)) = \mu(\varphi(X) \cup \varphi(Y)) = \mu(\varphi(X)) + \mu(\varphi(Y)) = \\ &= \Phi(X) + \Phi(Y). \end{aligned}$$

Тогда в каждой точке $x_0 \in \mathbf{R}^k$

$$J_{\varphi}(x_0) = \frac{d\Phi}{d\mu}(x_0) = \lim_{X \rightarrow x_0} \frac{\mu(\varphi(X))}{\mu(X)}, \quad (3)$$

таким образом, справедлива

Теорема 10. Якобиан отображения $\varphi: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^n$ в любой точке равен плотности функции множеств $\Phi(X) = \mu(\varphi(X))$, которая, в свою очередь равна коэффициенту изменения бесконечно малого объема под действием отображения φ в этой точке.

Замечание. В формуле (3) в числителе и знаменателе правой дроби стоят меры одной и той же размерности k . Поскольку, для любого множества D меньшей размерности ($D \subset \mathbf{R}^n$ при $n < k$) его мера μ (размерности k) равна нулю: $\mu(D) = 0$, мы получаем еще одно обоснование того факта, что $J_{\varphi} \equiv 0$ при $n < k$.

3. Криволинейные и поверхностные интегралы второго рода как аддитивные функции множеств

Пусть для плоского множества $D \subset \mathbf{R}^2$ одно- или многосвязного множества ∂D обозначает его границу (замкнутую кривую, или объединение замкнутых кривых), ориентированную так, что при обходе вдоль неё область остается **слева**.

Аналогично, если Σ – некоторая ориентированная (т.е с выбранным направлением нормали) двусторонняя гладкая (или кусочно гладкая) поверхность в пространстве, то $\partial \Sigma$ это её **край** (состоящий из одной или нескольких замкнутых линий), направление на котором **согласовано** обычным образом с направлением нормали.

Наконец, если T – некоторое трехмерное тело, то ∂T – замкнутая ориентированная поверхность, ограничивающая тело T , направление нормали на которой выбрано **наружу**.

Для доказательства теорем Грина, Остроградского Гаусса и Стокса, очень важно то, что следующие функции множеств аддитивны: (F – некоторое векторное поле)

$$1) A_F(X) = \oint_{\partial X} (\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}) \text{ – работа векторного поля } \mathbf{F} \text{ вдоль замкнутой границы}$$

плоской области или поверхности X .

$$2) P_F(X) = \oiint_{\partial X} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS \text{ – поток векторного поля } \mathbf{F} \text{ через замкнутую границу}$$

трехмерного тела X .

Таким образом, например, в формуле Грина:

$$\oint_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

и слева, и справа стоят аддитивные функции области D .

В принципе, следуя [1], можно определить не один, а три типа поверхностного интеграла второго рода через ориентированную поверхность Σ (всюду $\mathbf{n}$ – вектор единичной нормали к поверхности).

1) Поток первого типа – **векторный поток скалярного поля** U через ориентированную поверхности Σ :

$$\Phi_1 = \iint_{\Sigma} U \cdot \mathbf{n} dS$$

2) поток второго типа – это обычный **скалярный поток векторного поля** F через ориентированную поверхности Σ :

$$\Phi_2 = \iint_{\Sigma} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

3) поток третьего типа – это **векторный поток векторного поля F** через ориентированную поверхность Σ :

$$\Phi_3 = \iint_{\Sigma} [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] dS.$$

Замечание. Если поверхность Σ есть замкнутая граница трехмерного тела X , $\Sigma = \partial X$, то каждый из этих потоков есть аддитивная функция множества X .

Физический смысл потока первого типа: если U – скалярное поле давления, то Φ_1 равен суммарной силе давления, действующей на поверхность со стороны, противоположной направлению нормали.

Физический смысл потока второго типа хорошо известен – это количество жидкости, протекающее за единицу времени через воображаемую мембрану Σ , если F – поле скоростей этой жидкости.

Физический смысл потока третьего типа дать сложнее – это что-то вроде суммарного момента сил поля F относительно нормалей к поверхности Σ .

Для каждого из этих потоков справедлива своя теорема Остроградского Гаусса. Все они вытекают из следующего утверждения, которое мы назовем основной леммой:

Основная Лемма 11. Пусть W – непрерывно дифференцируемое скалярное поле, s – произвольное фиксированное направление. Тогда:

$$\oiint_{\partial T} W \cos(\mathbf{n} \wedge \mathbf{s}) dS = \iiint_T \frac{\partial W}{\partial s} dx dy dz,$$

где $\frac{\partial W}{\partial s}$ – производная по направлению s .

Теорема 12 (Остроградского – Гаусса). Пусть U – скалярное, $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ – векторное поле (оба непрерывно дифференцируемы), T – произвольное замкнутое ограниченное тело с кусочно-гладкой границей – замкнутой поверхностью $\Sigma = \partial T$, тогда:

(а) для потока первого типа:

$$\oiint_{\partial T} U \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_T \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right) dx dy dz;$$

(б) для потока второго типа:

$$\oiint_{\partial T} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz;$$

(в) для потока третьего типа:

$$\iint_{\partial T} [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] dS = \iiint_T \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right) dx dy dz$$

Инвариантные определения градиента, дивергенции и ротора. Следуя [1], определим: эти понятия как плотности соответствующих потоков относительно трехмерной меры, т.е. объема V . Эти определения не зависят от системы координат.

Градиентом векторного скалярного поля U в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ называется плотность потока первого типа в этой точке, а именно:

$$\mathbf{grad} U(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{X \rightarrow M_0} \frac{1}{V(X)} \oiint_{\partial X} U \cdot \mathbf{n} dS. \quad (4)$$

Дивергенций векторного поля $\mathbf{F}$ в точке M_0 называется плотность потока второго типа в этой точке, а именно:

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{X \rightarrow M_0} \frac{1}{V(X)} \oiint_{\partial X} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (5)$$

Ротором векторного поля $\mathbf{F}$ в точке M_0 называется плотность потока третьего типа в этой точке, а именно:

$$\mathbf{rot} \mathbf{F}(M_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{X \rightarrow M_0} \frac{1}{V(X)} \oiint_{\partial X} [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] dS. \quad (6)$$

Заметим, что из определений (4 –6) и теоремы (6) сразу следует, что

$$\begin{aligned} \oiint_{\partial T} U \cdot \mathbf{n} dS &= \iiint_T \mathbf{grad} U dx dy dz, \\ \oiint_{\partial T} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS &= \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F} dx dy dz, \\ \oiint_{\partial T} [\mathbf{n} \times \mathbf{F}] dS &= \iiint_T \mathbf{rot} \mathbf{F} dx dy dz. \end{aligned}$$

Но эти равенства (с нашими определениями градиента, дивергенции и ротора) не дают никакой существенной информации, пока не получены явные формулы этих операций. Они вытекают из теоремы 1 и 12 (при условии, что частные производные компонент поля непрерывны). Покажем это для дивергенции:

Пусть M_0 – произвольная точка, в окрестности которой определено векторное поле F . Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(M_0) &= \lim_{X \rightarrow M_0} \frac{1}{V(X)} \oiint_{\partial X} (F \cdot n) dS = \{\text{по теореме 12 (б)}\} = \\ &= \lim_{X \rightarrow M_0} \frac{1}{V(X)} \iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \{\text{по теореме 1}\} = \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)(M_0). \end{aligned}$$

Студентам будет поучительно ознакомиться с приложением теоремы Остроградского – Гаусса (для потока первого типа) для вывода **закона Архимеда**: *на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вертикально вверх и равная весу вытесненной жидкости.*

Для простоты рассмотрим случай, когда тело T **полностью** погружено в жидкость (с плотностью γ). Пусть начало системы координат находится на поверхности. Тогда на глубине $h = -z$ давление P жидкости, согласно закону Паскаля, равно $P = \gamma gh = -\gamma gz$, где g – ускорение силы тяжести. Следовательно, градиент давления равен $\mathbf{grad} P = -\gamma g \mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный вертикально вверх. Сила давления, действующая на все тело, выражается поверхностным интегралом второго рода первого типа и, по первой формуле Остроградского – Гаусса, равна:

$$\begin{aligned} F &= - \oiint_{\partial T} P ds = - \iiint_T \mathbf{grad} P dx dy dz = \iiint_T \mathbf{k} \gamma g dx dy dz = \\ &= \mathbf{k} \gamma g \iiint_T dx dy dz = \mathbf{k} g \gamma V(T) = \mathbf{k} g m(T), \end{aligned}$$

где $V(T)$ и $m(T)$ – объем тела T и масса жидкости, заключенной в этом объеме соответственно. Последняя формула как раз и выражает вектор, направленный вертикально вверх, величина которого равна весу тела T .

Заключение. На примере модулей «Кратные интегралы», «Криволинейные и поверхностные интегралы» и «теория поля» мы показали плодотворную идею широкого использования понятия аддитивной функции множества и её плотности в общем курсе математики технического вуза. Благодаря этому, многие различные формулы и теоремы этих разделов удалось обобщить и изложить в едином ключе. Кроме этого, студенты попутно знакомятся с некоторыми естественными и интуитивно понятными положениями теории меры.

Список литературы

1. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов, – М.: Лань, 2009, 608 с.
2. И. М. Петрушко, Н. В. Гуличев, Л. Г. Попов, А. Я. Янченко. Курс высшей математики. Кратные интегралы. Векторный анализ. – М.: Лань, 2008, –320 с.
3. В. Р. Гаврилов, Е. Е. Иванова, В. Д. Морозова. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. Серия «Математика в техническом университете», ред. В.С. Зарубин, А.П. Крищенко, вып. 9, – М.: Издательство: МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2008, – 496 с.
4. А. Г. Порошкин. Теория меры и интеграла. – М.: Либроком, 2012, – 184 с.
5. С. Сакс. Теория интеграла, – М.: Факториал Пресс, 2004, – 496 с.
6. Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. Интеграл, мера и производная, – М.: "Наука", 1967, – 219 стр.
7. В. В. Воеводин. Линейная алгебра, – М.: Лань, 2009, – 416 с.
8. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей, – М.: Либроком, 2011, – 488 с.
9. Теория вероятностей. Авторы: А. В. Печинкин, О. И. Тескин, и др. Серия «Математика в техническом университете», ред. В.С. Зарубин, А.П. Крищенко, вып. 16, – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006, – 456 с.