

Формирование упрощенных нелинейных моделей для задач исследования движения тел сложной формы

77-48211/628259

10, октябрь 2013

Романова И. К.

УДК 531.36, 517.977

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

romanova@sm.bmstu.ru

Для движущихся тел простой формы в виде тел вращения достаточно подробно разработаны методы анализа и синтеза систем управления на базе линейных моделей. Однако реальные процессы движения весьма далеки от таких упрощенных моделей. Поэтому представляет интерес применение более общих методов исследований на базе нелинейных моделей. Особый интерес представляют модели тел, претерпевших необратимые искажения формы. Анализ устойчивости и демпфирующих свойств таких объектов является весьма актуальной проблемой. Чтобы сделать задачу более определенной, рассмотрим модели движения деформированных тел в виде волнообразностей. Показано, что модель обладает нелинейностями в виде степенных функций. В условиях проведения многократного моделирования и оптимизации представляется необходимым выполнить редукцию модели, что также позволит выявить основные составляющие изучаемого процесса. Для таких моделей необходимо разработать алгоритм редукции и выполнить верификацию результатов.

2. Постановка задачи редукции

Подробная формулировка задачи редукции систем приведена в [1]. Кратко напомним основные уравнения, которые далее будут использованы в исследовании систем.

Пусть полная модель представляется в виде:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u); \\ y &= h(x), \quad x \in \mathcal{R}^n, u \in \mathcal{R}^m, y \in \mathcal{R}^p.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x - вектор фазовых координат размерности n ; u - вектор управления размерности m ; y - вектор наблюдения размерности p .

Задача редукции для системы общего вида может быть сформулирована как получение редуцированной модели вида

$$\dot{z} = a(z, u); \quad y = c(z); \quad z \in \mathfrak{R}^k, \quad k \ll n, \quad (2)$$

т.е. конечной целью редукции является получение модели, которая имеет размерность намного меньшую, чем исходная.

Поскольку далеко не всегда модель управляема, более общим случаем является модель динамической системы. Для полной модели высокого порядка n используется запись вида

$$\dot{x} = f(x); \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad n \gg 1 \quad (3)$$

Редуцированная модель динамической системы записывается как

$$\dot{z} = a(z); \quad z \in \mathfrak{R}^k, \quad k \ll n \quad (4)$$

Поскольку достаточно много методов разработано для редукции управляемых систем, проблема редукции динамических систем общего вида может быть приведена к виду задачи для системы управления добавлением входа и выхода, т.е.

$$\dot{x} = f(x) + u; \quad y = x. \quad (5)$$

К моделям систем (2) и (4) предъявляются общее требование: редуцированная модель должна отражать существенные свойства полной модели. Для редуцированной модели системы управления требования более конкретны: должны сохраняться существенные свойства вход-выход; регулятор, разработанный для стабилизации модели сокращенного порядка, также стабилизирует полную модель. Сравнительный анализ подходов к решению задачи редукции линейных и нелинейных систем, который будет проведен ниже, покажет определенную преемственность, проявившаяся в том, что многие нелинейные методы опираются на распространение идей редукции линейных систем.

3. Формулировка задачи.

Выбор метода редукции нелинейной модели во многом предопределен решаемой задачей, и в, частности, ее будущим использованием для более общей задачи синтеза оптимального управления. Поэтому начнем изложение с описания модели объекта.

Рассмотрим движение тела в вертикальной плоскости. Уравнения для модели такого движения представлены, в частности, в [2]:

$$\begin{aligned}
 m \frac{dV}{dt} &= P \cos \alpha - X_a - G \sin \Theta \\
 mV \frac{d\Theta}{dt} &= P \sin \alpha + Y_a - G \cos \Theta; \\
 I_z \frac{d\omega_z}{dt} &= M_z \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z
 \end{aligned} \tag{6}$$

Для управляемой динамической системы выделим аэродинамические силы (лобового сопротивления и подъемной силы) и момента тангажа для корпуса и управляющих рулей

$$\begin{aligned}
 X_a &= (X_a)_к + (X_a)_р \\
 Y_a &= (Y_a)_к + (Y_a)_р \\
 M_z &= (M_z)_к + (M_z)_р
 \end{aligned} \tag{7}$$

где индексы «к» и «р» относятся к корпусу и рулям. В качестве одной из базовых фазовых переменных возьмем угол атаки. Положив тягу нулевой и пренебрегая силой тяжести, окончательно получим

$$\begin{aligned}
 \frac{dV}{dt} &= -[(X_a)_к + (X_a)_р] \\
 \frac{d\alpha}{dt} &= \omega_z - [(Y_a)_к + (Y_a)_р] / mV; \\
 \frac{d\omega_z}{dt} &= [(M_z)_к + (M_z)_р] / I_z
 \end{aligned} \tag{8}$$

Приведем задачу к виду (1)

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\
 x &= [V \quad \alpha \quad \omega_z] \\
 \delta_p &\equiv u \\
 f(x) &= [(-(X_a)_к); (\omega_z - (Y_a)_к) / mV; ((M_z)_к / I_z)] \\
 g(x) &= [-X_a^{\delta_p}; Y_a^{\delta_p}; M_z^{\delta_p}]
 \end{aligned} \tag{9}$$

Частным случаем управляемой системы является неуправляемая динамическая система, которая может рассматриваться как управляемая с зафиксированными рулями.

Тогда силы от рулей– это силы от оперения, которое придает системе статическую устойчивость и требуемое демпфирование. Запишем выражения аэродинамических коэффициентов оперения в следующем виде

$$\begin{aligned} X_a^p &= X_{ap0} + X_{ap}^{\alpha_p} \alpha_p^2 \\ Y_{ap} &= Y_{ap}^{\alpha_p} \alpha_p \\ M_{ap} &= Y_{ap}^{\alpha_p} \alpha_p \Delta_\partial \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку оперение может быть установлено под углом к корпусу, получим для неуправляемого случая псевдоуправление

$$u = \alpha_p = \alpha + \delta_0 \quad \text{или} \quad u = \sum Kx = 0 \cdot V + 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \omega_z \quad (11)$$

Т.о. задача формально сводится к общему случаю управляемого движения. Формализация задачи позволяет применять технологии редукции нелинейных систем к задачам исследования динамики управляемого и неуправляемого движения тел.

В качестве тела сложной формы рассмотрим объект типа тела вращения с деформированной поверхностью в виде волнообразностей.

Формулы и подходы к описанию аэродинамики таких объектов подробно изложены в [2]. В данной статье на первый план выходит проблема редукции динамической системы, поэтому просто приведем формулы.

Радиусы поперечного сечения тела с оживальной формой носовой части и волнообразной формой поверхности цилиндрической части записываются:

$$\begin{aligned} r(x) &= R_M (x/H)^p, \quad 0 \leq x \leq H; \\ r(x) &= R_M + \delta \sin[(x-H)N\pi/(L-H)], \quad H \leq x \leq L; \end{aligned}$$

Коэффициенты нормальной силы и момента тангажа рассчитываются как сумма двух составляющих

$$\begin{aligned} C_y &= C_{y1} + C_{y2} \\ m_z &= m_{z1} + m_{z2} \end{aligned}$$

Первая часть рассчитывается по теории тонкого тела, для

$$\begin{aligned} C_{y1} &= \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha \\ m_{z1} &= [Q - S_B(L - x_m)] \sin 2\alpha \cos \alpha / S_B D_M \end{aligned} \quad (12)$$

где Q - объем тела, R_M , D_M - радиус и диаметр миделевого сечения

$S_B = S_M$, $D_M = 2R_M$ - характерные площадь и длина

x_m – положение точки от носка тела, относительно которой рассчитывается момент.

Вторая часть, учитывающая волнообразности, рассчитывается по формулам:

$$C_{y2} = \frac{2\eta \sin \alpha}{S_B} \left[a_1 \sin \alpha \frac{L^2}{2} + \sum_{n=2}^6 \frac{a_n \sin^n \alpha H^{n+1}}{R_M^{n-1} [(n+1) - p(n-1)]} + \sum_{n=2}^6 a_n \sin^n \alpha \int_H^L \frac{x^n}{[r(x)]^{n-1}} dx \right]$$

$$m_{z2} = \left(\frac{x_m C_{y1}}{D_M} \right) - 2\eta \sin \alpha \left[a_1 \sin \alpha \frac{L^3}{3} + \sum_{n=2}^6 a_n \sin^n \alpha \frac{H^{n+2}}{R_M^{n-1}} [(n+2) - p(n-1)] + \dots \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^6 a_n \sin^n \alpha \int_H^L \left\{ x^{n+1} / [r(x)]^{n-1} \right\} dx \right] / S_B D_M$$

$$\eta = DM / L \tag{13}$$

n – количество полупериодов волнообразностей.

$a_1=0.4632$; $a_2=-0.48295 \cdot 10^{-1}$; $a_3=0.20405 \cdot 10^{-2}$;

$a_4=-0.20392 \cdot 10^{-4}$; $a_5=-0.23214 \cdot 10^{-6}$; $a_6=0.707475 \cdot 10^{-8}$ – коэффициенты в приближенном представлении коэффициента сопротивления в поперечном обтекании.

Зависимость для отдельных членов в сумме ряда (13) показана на рис.1; анализ ее свидетельствует о том, что нет возможности просто отбросить высшие члены и необходимо применять более сложные механизмы редукции нелинейных систем.

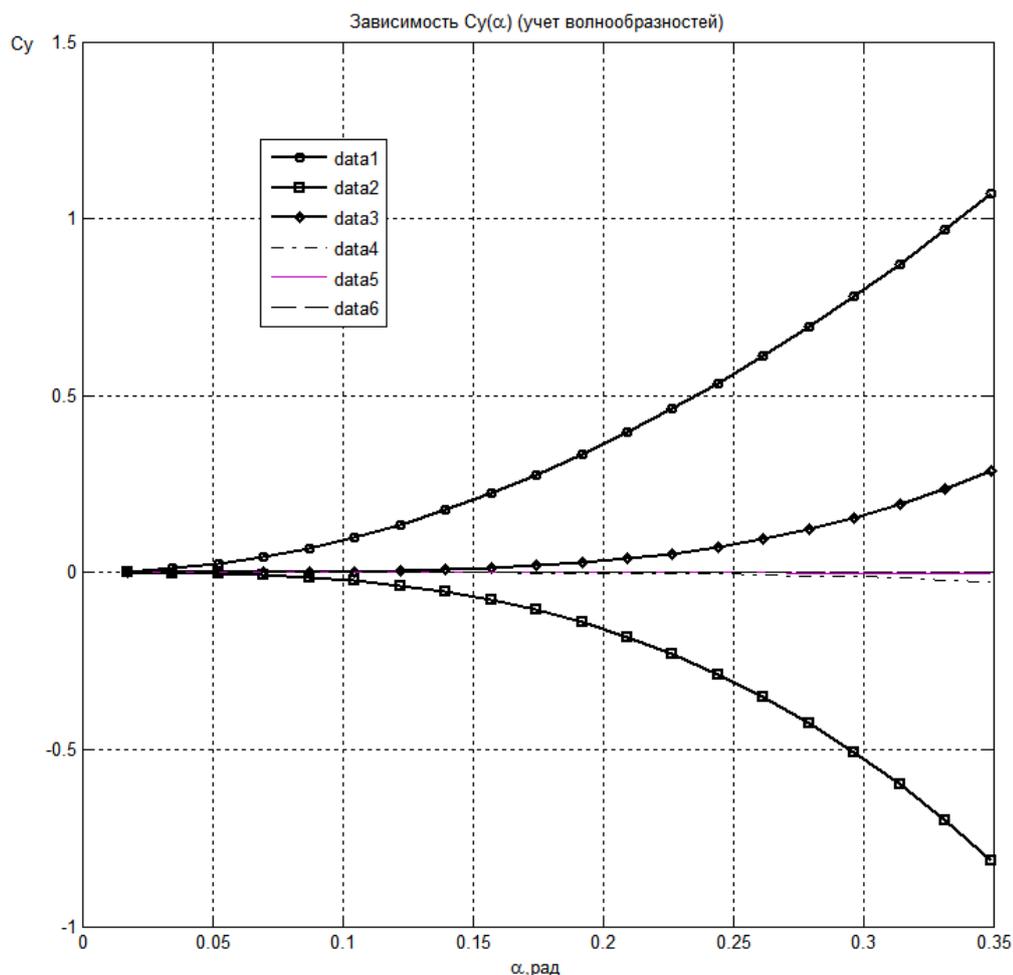


Рис.1. Зависимость для отдельных членов степенного ряда C_{y2} (13)

4. Выбор метода редукции системы

Определим круг методов редукции и проведем сравнительный анализ этих методов

Редукция моделей нелинейных систем – достаточно сложно развивающаяся область исследований. Никакой из существующих на сегодняшний день методов не гарантирует сохранение устойчивости системы или обеспечивает желаемые границы ошибки. Про большинство методов можно сказать, что их корни лежат в методах, разработанных для линейных систем.

Эвристические методы - наиболее общий подход к редукции нелинейных моделей, косвенно используемый во всех работах, связанных с моделированием, когда степень сложность выбирается адекватной поставленной цели моделирования. Задача в этом случае решается одним из трех способов:

- отказаться от эффектов, про которые известно интуитивно или из предыдущих опытов, что они имеют относительно слабое влияние на динамику моделируемого объекта или процесса;

- оценить масштабы времени и заменить относительно быструю динамику на статические коэффициенты усиления.

- усреднить несколько эффектов, собрав их в один псевдоэффект.

Второй из этой тройки методов имеет также формальное название метода сингулярных возмущений. Дифференциальные уравнения

$$\dot{x} = f(x, u);$$

разделены на две части, одна относительно более быстрая, чем другая

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u);$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u);$$

Если x_2 соответствует быстрой динамике, вводится фактор θ , так что модель приобретает следующий вид

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, u);$$

$$\theta \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, u);$$

и затем устанавливается $\theta = 0$. Первоначальная система теперь заменена набором из дифференциальных алгебраических уравнений с меньшим количеством состояний.

Линеаризация относительно точек равновесия или траектории возможна, если известны точки в пространстве состояний, в окрестностях которых происходит движение системы. В этих точках нелинейная модель линеаризуется и затем упрощается с помощью линейных методов редукции. Задача может быть также поставлена как оценка эффекта, возникающего при возможных отклонениях от номинального сигнала. Линеаризация порождает нестационарную линейную систему в пространстве состояний:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t);$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t);$$

и тогда может применяться теория сбалансированного усечения линейных нестационарных систем. Степень правдоподобия уменьшается по мере удаления от точки линеаризации и усилению нелинейности исходной системы.

Балансировка нелинейных систем, использующая функции энергии может рассматриваться как расширение метода сбалансированного усечения линейных систем.

Метод предложен Шерпен в 1993 г. Центральной частью методики для системы нелинейных уравнений вида,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + g(x) u \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (14)$$

является определение функций управляемости и наблюдаемости $L_c(x)$ и $L_o(x)$ как решений двух уравнений

$$\frac{\partial L_c}{\partial x}(x)f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial L_c}{\partial x}(x)g(x)g^T(x) \frac{\partial^T L_c}{\partial x}(x) = 0, L_c(0) = 0$$

и

$$\frac{\partial L_o}{\partial x}(x)f(x) + \frac{1}{2} h^T(x)h(x) = 0, L_o(0) = 0$$

Дополнительная замена координат может сбалансировать $L_c(x)$ и $L_o(x)$ [4]. По аналогии с линейным случаем, функции $\tau_1(z) \geq \dots \geq \tau_n(z)$ называются функциями сингулярных значений системы. Редукция модели выполняется путем отсечения состояний в сбалансированной форме, соответствующих маленьким сингулярным функциям. В последние годы методики распространяются и на дискретные системы [4] и нелинейные смешанные дифференциальные - алгебраические системы [5].

Важный вклад в развитие математических аспектов редукции, связанных с уточнением границ ошибок, был сделан в работах Кренера [6]. Он, в частности, предложил нормальную входную степенную форму

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) = Fx + Gu + f^{[2]}(x, u) + \dots + f^{[d]}(x, u) + O(x, u)^{d+1} \\ y &= h(x) = Hx + h^{[2]}(x) + \dots + h^{[d]}(x, u) + O(x)^{d+1}\end{aligned}$$

Ограничением к применению метода являются требования к вычислительным ресурсам, поэтому он применяется в основном, к моделям небольшой размерности.

Балансировка также проводится с использованием эмпирического Граммиана. Метод впервые был предложен [7,8]. В этом методе собираются данные о состояниях системы, полученные для импульсных входных сигналов, сгенерированных в разных направлениях. Данные используются затем, чтобы оценить на основе моделирования постоянные матрицы Граммиана управляемости и Граммиана наблюдаемости. Далее

обычным образом выполняется балансировка Граммианов по линейной теории, соответствующей линейной замены координат и отсечение состояний, как и в линейном случае. Более поздняя модификация метода сняла требования импульсных входных сигналов.

Метод *POD* (подходящие ортогональные разложения) является одним из наиболее часто используемых инструментов для редукции моделей нелинейных систем. Суть метода – используя данные моделирования, найти подпространство небольшой размерности, которое охватывает большую часть динамики состояния системы. Метод может быть кратко описан следующими шагами.

- моделируется нелинейная система $\dot{x} = f(x, u)$
- собираются образцы вектора состояний в матрице X .

$$X = [x(t_0) \ x(t_1) \ \dots \ x(t_N)], \ x(t) \in R^n$$

- факторизуется X с помощью разложений сингулярных значений

$$U \Sigma V^T = X$$

- выбирается уровень усечения после оценки размера сингулярных значений.

Проводится усечение $U \in R^{n \times n}$ к $\hat{U} \in R^{\hat{n} \times \hat{n}}$ так, чтобы $x \approx \hat{U} \hat{x}$ где $x \in R^n$.

Тогда редуцированная модель имеет вид $\hat{\dot{x}} = \hat{U}^T f(\hat{U} \hat{x}, u)$

Кусочно-линейная траекторная редукция модели – это новый подход к редукции нелинейной модели представлен в [9]. Метод основан на линеаризациях относительно одной или многих тестовых траекторий. Сначала моделируется нелинейная система общего вида с тестовым входным сигналом $u_0(t)$. Затем выбирается набор точек линеаризации (x_0^i, u_0^i) по тестовой траектории. Эти точки в общем не являются точками равновесия системы. Линеаризация около точки i и дает аппроксимацию нелинейной системы. Исходная нелинейная система аппроксимируется более общим способом путем взвешенного суммирования локальных линеаризаций. После прохождения по всей траектории и нахождения всех точек производится линеаризация и далее может быть использована обычная теория редукции систем.

Редукция модели через идентификацию системы опирается на определение идентификации системы как процесса оценки динамической модели по входным и выходным данным. То есть вместо использования внутреннего описания исходной

модели, можно было бы оценивать его динамику только на основании анализа моделирования по входным и выходным сигналам. Редукция модели выполняется через ограничение сложности оцениваемой модели, порождая более простую структуру, чем первоначальная модель. Большинство методов идентификации системы определено для дискретных систем, так как моделирование и данные измерения являются типично дискретными процедурами и величинами. Методология применима к и линейным и нелинейным системам. Главная трудность в нелинейной идентификации системы состоит в том, что система может обладать разными типами нелинейностей и трудно найти некий общий класс нелинейных моделей.

5. Методика редукции исследуемой системы.

Методика состоит в объединении метода средних граммианов и кусочно-линейной траекторной редукции. Такое объединение вызвано установленным первоначальными практическими исследованиями фактом зависимости результатов редукции по методу средних граммианов от выбора начальных условий. Более того, для повышения эффективности вычислительных экспериментов предлагается формировать набор траекторий, используя стратегию равномерно распределенной последовательности (LPTau –последовательности), программная реализация которой на языке MATLAB приведена в[10].

С учетом этих дополнений схема алгоритма состоит из следующих этапов

1. Генерируется набор тестовых входных сигналов u по алгоритму LPTau последовательности
2. Выбирается i -тая пробная точка входного сигнала
3. Моделируется нелинейная система общего вида

$$\dot{x} = f(x, u)$$

$$y = g(x, u)$$

4. Линеаризуется система относительно тестовой траектории, и рассчитываются матрицы

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), u(t)); \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}(x(t), u(t)); \quad C = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t));$$

5. Рассчитываются средние Граммианы

$$\bar{P} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} P(\tau) d\tau \quad \bar{Q} = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} Q(\tau) d\tau$$

6. Используется стандартный метод сбалансированного усечения для \bar{P}, \bar{Q} с применением балансирующей замены координат $z=Tx$ и сингулярных значений $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \sigma_n \geq$

7. Определяется редуцированная модель порядка \hat{n} из размерности сингулярных значений, остальные состояния отсекаются, так что T_l - первые \hat{n} строк T и T_r – крайние левые столбцы T^{-1}

8. Применяется отсекающее изменение координат к исходной системе

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= T_l f(T_r \hat{z}, u) \\ \hat{y} &= g(T_r \hat{z}, u) \end{aligned}$$

9. Проверка окончания цикла: по окончании выборок по всем пробным точкам выполняется анализ и осреднение коэффициентов моделей.

Выражения для коэффициентов (12) и (13) модифицируются путем введения новой переменной $z = \sin \alpha$.

Методика была реализована в пакете MATLAB. Был разработан смешанный вариант исследований, сочетающий script – файлы, файлы-функции и средства пакета Simulink и состоят из следующих этапов, представленных на блок-схеме рис.2.

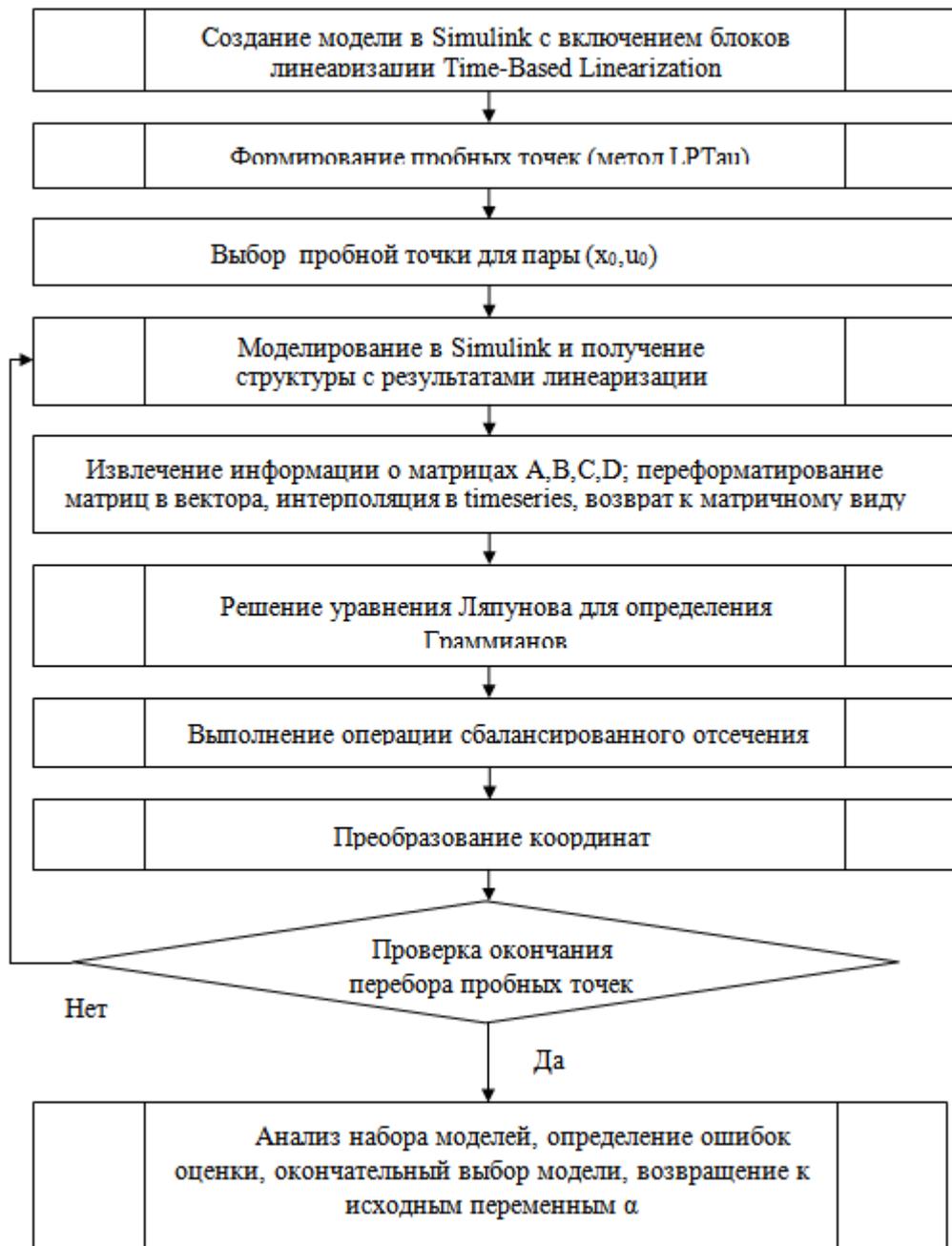


Рис.2. Блок-схема алгоритма редукции

Практическая редукция привела к модели вида

$$\hat{\dot{x}} = f(\hat{x}) + g(\hat{x})u$$

$$\hat{x} = [\alpha \quad \omega_z]$$

$$f(\hat{x}) = [(48.106 \sin \alpha + 1744.8 \sin^2 \alpha) \quad (4.81 \sin \alpha + 174.5 \sin^2 \alpha)]$$

Результаты редукции представлены на рис. 3

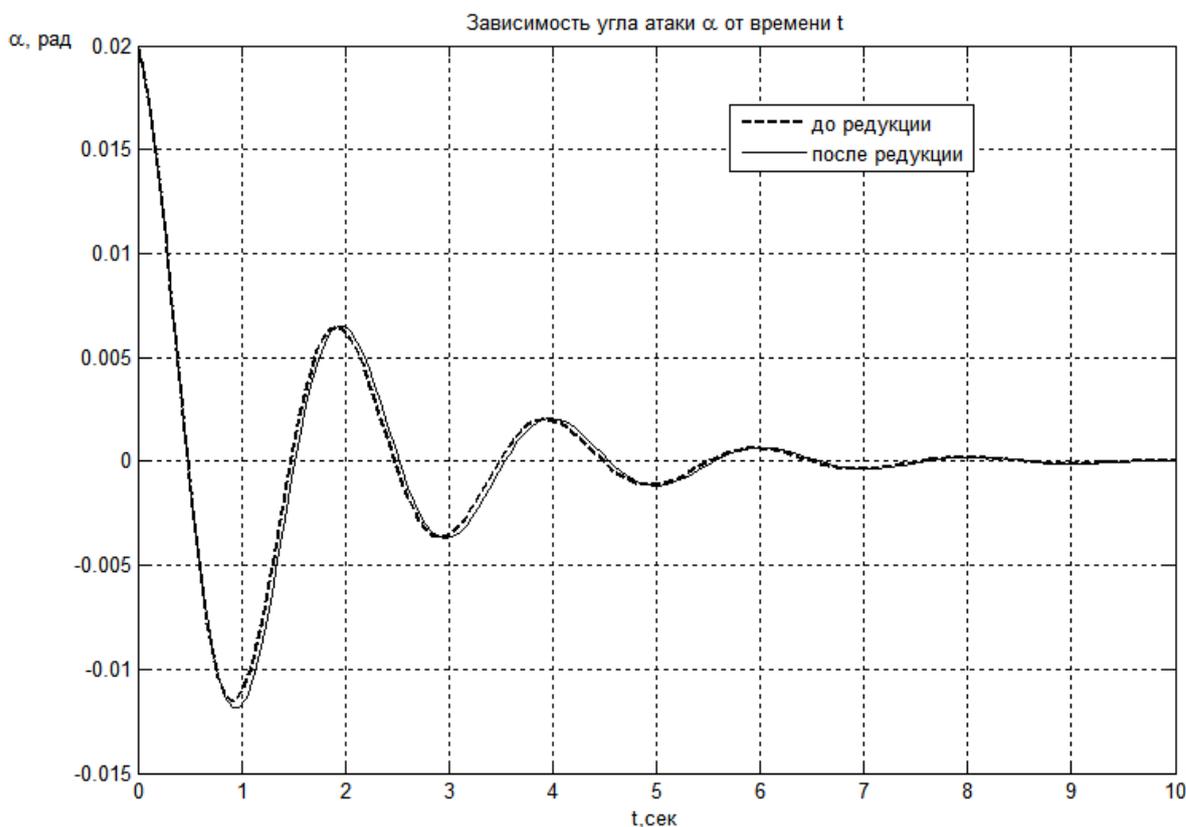


Рис. 3. Результаты моделирования по исходной и редуцированной моделям

Выводы

Проведенные исследования позволили получить достаточно простую нелинейную модель для описания динамики не изученного до сих пор класса движущихся тел с необратимыми искажениями формы. Модель позволяет уточнить требования к стабилизирующим и управляющим устройствам. Сделаны предложения в усовершенствование одного из методов нелинейной редукции – метода средних Граммианов путем объединения его с методом кусочно-линейной траекторной редукции. Для повышения эффективности вычислительных экспериментов предлагается формировать набор траекторий, используя стратегию равномерно распределенной последовательности (LPtau –последовательности). Разработаны соответствующие программные средства, позволяющие в определенной степени автоматизировать проведение исследований и редукции систем.

Список литературы

1. Романова И.К. Современные методы редукции систем и их применение к задачам анализа и синтеза систем управления. Вестник МГТУ. Спец. выпуск «Специальная робототехника и мехатроника». 2011 г. – С. 142-152.

2. Романова И.К., Соловьев В.С. Исследование особенностей аэродинамики искривленных. Наука и образование. Электронное издание. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана – 2011 г. № 11

3. Романова И.К. Управление сложными техническими объектами. Ч. 1, Ч. 2, Ч. 3. М: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007-2012 гг.

4. Scherpen, J. and K. Fujimoto. Nonlinear balanced realization based on singular value analysis of Hankel operators. In Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision & Control, 2003- pp. 6072–6077. IEEE, Maui, USA.

5. Sjöberg, J., T. Glad, and K. Fujimoto. Model reduction of nonlinear differential-algebraic equations. 2007- In NOLCOS 07. IFAC.

6. Krener, A. J. Analysis and Design of Nonlinear Control Systems -In Honor of Alberto Isidori, chapter Reduced Order Modeling of Nonlinear Control Systems, 2008- pp. 41–62. Springer-Verlag, Berlin, Germany.

7. Lall, S., J. Marsden, and S. Glavaski “A subspace approach to balanced truncation for model reduction of nonlinear control systems.” International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2002- 12, pp. 519–535.

8. Hahn, J., T. Edgar, and W. Marquardt . Controllability and observability covariance matrices for the analysis and order reduction of stable nonlinear systems. Journal of Process Control, 2003- 13:2, pp. 115– 127., Netherlands.

9. Rewieński, M. J. A Trajectory Piecewise-Linear Approach to Model Order Reduction of Nonlinear Dynamical Systems. PhD thesis, Dept. of Electrical Engineering and Computer Science, 2003 - Massachusetts Institute of Technology.

10. Романова И.К. Программный комплекс «Многокритериальная оптимизация систем управления». Свидетельство о государственной регистрации № 2012610400 Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентным и товарным знакам от 10.01.2012 г.