НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Методика вычисления коэффициентов чувствительности фазовых координат нелинейных механических систем

77-48211/604164

09, сентябрь 2013

Беляев А. В., Никитенко В.

УДК 517.947.44

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
beliaev@bmstu.ru

Введение

Методика предназначена для параметрического анализа динамических характеристик нелинейных механических систем. В качестве математической модели используется система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая поведение динамической системы при внешнем воздействии. Состояние системы оценивается по положению и скорости отдельных точек системы на заданном участке времени. Допускается, что зависимость сил, возникающих от взаимного перемещения отдельных элементов системы, может иметь кусочно-линейный вид. В данной постановке задача параметрического анализа динамики летательного аппарата рассматривалась в работах [1, 2]. Актуальность задачи обусловлена потребностью повышения надежности ракетно-космической техники, в том числе на этапе её проектирования. Известно, что малые космические аппараты, имея приблизительно один вес, могут существенно отличаться друг от друга конструктивно, иметь разные динамические характеристики. Для каждого нового аппарата неизменно возникает потребность в разработке мер по снижению уровня перегрузки в узлах и агрегатах его конструкции. Поэтому постоянно возрастают требования к достоверности и снижению трудоемкости расчётов, к разработке новых методик и алгоритмов с использованием современных вычислительных средств. В данной статье рассмотрена методика параметрического анализа динамических систем, разработанная на основе теории чувствительности [3]. Результаты иллюстрируются примером.

1. Методика вычисления коэффициентов чувствительности

При анализе нагружения конструкции космического аппарата в реальных условиях эксплуатации может потребоваться оценка влияния разброса значений параметров конструкции на его динамические характеристики. При этом часто используется разложение решения уравнений движения конструкции в степенные ряды по вариациям параметров [3]. Если вариации не слишком велики, удается ограничиться наиболее простым – линейным приближением.

Известная процедура [3], заключающаяся в интегрировании цепочных систем уравнений относительно всех коэффициентов разложения до заданного порядка (хотя значение полной их совокупности обычно не требуется в практических задачах) уже при относительно небольшом количестве вариаций оказывается громоздкой. Ниже предлагается подход во многом лишенный указанного недостатка и позволяющий для кусочно-линейных систем найти гладкие участки коэффициентов во времени и их «скачки» в моменты перехода с одного линейного участка на другой (в точках переключения).

Допустим, что динамика механической системы описывается системой уравнений в нормальной форме Коши

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} [\varphi_{ij}(\overline{A},t)x_j + b_{ij}(\overline{A},t)] + r_i(\overline{A},t), \quad x_i|_{t=t_0} = x_{0i}, \quad (i = 1, 2, ..., n), \tag{1}$$

где

$$\varphi_{ij}(\overline{A},t) = \varphi_{ij}^{(k)}(\overline{A},t), \ b_{ij}(\overline{A},t) = b_{ij}^{(k)}(\overline{A},t) \ \textit{при} \ \tilde{x}_{ij}^{(k-1)} \le x_j < \tilde{x}_{ij}^{(k)} \quad (k = 1, 2, ..., p_{ij}); \tag{2}$$

$\varphi_{ij}(\overline{A},t)$, $b_{ij}(\overline{A},t)$ $\forall i, j$ - коэффициенты; $r_{ij}(\overline{A},t)$ - внешнее возмущение; $\overline{A} = (a_1, a_1, ...a_s)^T$ - вектор вариаций; $p_{i,j}$ - число линейных участков $\varphi_{ij}(\overline{A},t)$.

Согласно (2), условие переключения может быть записано как

$$x_j(\overline{A},t_l) = \tilde{x}_{ij}^{(k)}, \tag{3}$$

где t_l $(l = 1, 2, ...)$ - момент перехода с одного линейного участка на другой.

Если обозначить $\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ - вектор фазовых координат; $\Phi(\overline{A},t)$ - матрица $(n\times n)$ с элементами $\varphi_{ij}(\overline{A},t)$; $\overline{F}(\overline{A},t)$ - вектор с элементами $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(\overline{A},t)+r_i(\overline{A},t)$, то (1) представляется в форме

$$\dot{\overline{X}}=\Phi(\overline{A},t)\overline{X}+\overline{F}(\overline{A},t),\ \ \overline{X}|_{t=t_0}=\overline{X_0}(\overline{A}), \tag{4}$$

где $\Phi(\overline{A},t)=\Phi^{(l)}(\overline{A},t)$; $\overline{F}(\overline{A},t)=\overline{F^{(l)}}(\overline{A},t)$ при $t_{l-1}\le t\le t_l$. $\Phi^{(l)}(\overline{A},t),F^{(l)}(\overline{A},t),\ \forall l$ - аналитические функции $\overline{A}$ и t на $[t_{l-1},t_l]$.

Преобразуем (4) к форме однородного уравнения. Для этого добавим тривиальное скалярное уравнение

$$\dot{x}_{n+1}=0,\ x_{n+1}|_{t=t_0}=1. \tag{5}$$

Переопределим обозначения векторов $\overline{X}$ и $\overline{X_0}$ следующим образом. Пусть

$\overline{X}=(x_1,x_2,...,x_{n+1})^T$ - расширенный вектор фазовых координат, а $\overline{X_0}=(x_{01},x_{02},...,x_{0n},1)$ - данный вектор при значении $t=t_0$.

Объединив (4) и (5), получим

$$\dot{\overline{X}}=G(\overline{A},t)\overline{X},\ \ \overline{X}|_{t=t_0}=\overline{X_0}(\overline{A}), \tag{6}$$

где $G=\begin{vmatrix}\Phi & \overline{F}\\ 0 & 0\end{vmatrix}$, причем $G(\overline{A},t)=G^{(l)}(\overline{A},t)$ при $t_{l-1}<t<t_l$, $\forall l$.

Представим G и $\overline{X_0}$ в форме степенных рядов, ограничившись в них линейными членами

$$G=G_0+\sum_{k=1}^{s}G_k a_k, \tag{7}$$

$$\overline{X_0}=\overline{X_0}^{(0)}+\sum_{k=1}^{s}\overline{\Lambda}_k(t_0)a_k, \tag{8}$$

где $G_0 = G_0^{(l)}\,|_{\overline{A}=0}$; $G_k = G_k^{(l)} = \left.\dfrac{\partial G^{(l)}}{\partial a_k}\right|_{\overline{A}=0}$, *при* $t_{l-1} < t < t_l$, $\forall l$;

$$\overline{X_0}^{(0)} = \overline{X_0}\,\Big|_{\overline{A}=0},\ \overline{\Lambda}_k(t_0) = \left.\frac{\partial \overline{X}_0}{\partial a_k}\right|_{\overline{A}=0}.$$

Не принимая пока во внимание зависимость $t_l(X), \forall l$, которая определяет нелинейные свойства системы, запишем для (6) решение в виде

$$\overline{X}(t) = \Omega_{t_0}^{t}(G)\overline{X_0}, \tag{9}$$

где $\Omega_{t_0}^{t}(G)$ - фундаментальная матрица. Подставив (7) в (9) и используя преобразование фундаментальной матрицы от суммы матриц [4], получим

$$\overline{X}(t) = \Omega_{t_0}^{t}(G_0)\Omega_{t_0}^{t}(D)\overline{X}_0 \tag{10}$$

где

$$D = [\Omega_{t_0}^{t}(G_0)]^{-1}\sum_{k=1}^{s} G_k a_k \Omega_{t_0}^{t}(G_0). \tag{11}$$

Разложим второй сомножитель в (10) в ряд, который абсолютно и равномерно сходится, если все элементы G ограничены и имеют счетное множество разрывов [4]:

$$\overline{X}(t) = \Omega_{t_0}^{t}(G_0)[E + \int_{t_0}^{t} D(\tau) + \ldots]\overline{X_0}. \tag{12}$$

Подстановка (8), (11) в (12) и последующие преобразования приводят к соотношению

$$\overline{X}(t) = \Omega_{t_0}^{t}(G_0)\{\overline{X_0}^{(0)} + \sum_{k=1}^{s}[W_k(t)\overline{X_0}^{(0)} + \overline{\Lambda}_k(t_0)]a_k\}, \tag{13}$$

где

$$W_k(t) = \int_{t_0}^{t}[\Omega_{t_0}^{\tau}(G_0)]^{-1} G_k \Omega_{t_0}^{\tau}(G_0)\,d\tau. \tag{14}$$

Получим из (13) основные расчетные рекуррентные зависимости, связывающие моменты времени t и $t+\delta$ (δ - шаг по времени). Для этого выберем t за начальный момент времени ($t_0 = t$), тогда

$$\overline{X}(t+\delta)=\overline{X}^{(0)}(t+\delta)+\sum_{k=1}^{s}\overline{\Lambda}_k(t+\delta)a_k, \tag{15}$$

где $$\begin{cases}\overline{X}^{(0)}(t+\delta)=\Omega_t^{t+\delta}(G_0)\overline{X}^{(0)}(t)\\ \overline{\Lambda}_k(t+\delta)=\Omega_t^{t+\delta}(G_0)[W_k(t+\delta)\overline{X}^{(0)}(t)+\overline{\Lambda}_k(t)]\end{cases}. \tag{16}$$

Выражения (16) позволяют вычислить $\overline{X}^{(0)}(t)$ и $\overline{\Lambda}_k(t)$, если t_l не зависит от $\overline{A}$. Известные результаты [3] дают возможность учесть эту зависимость введением в моменты переключения аддитивных скачков $\overline{\Lambda}_k(t)$, определяемых с помощью обобщенного дифференцирования. Найдем указанные скачки, оставаясь в пределах используемого здесь математического аппарата. Разложим $t_l(\overline{A})$ в ряд

$$t_l=t_l^{(0)}+\sum_{k=1}^{s}\beta_k a_k+..., \tag{17}$$

где $t_l=t_l\big|_{\overline{A}=0}$, $\beta_k=\left.\dfrac{\partial t_l}{\partial a_k}\right|_{\overline{A}=0}$.

Теперь рассмотрим окрестность точки t_l и, воспользовавшись свойством фундаментальной матрицы [4], запишем (9) в виде

$$\overline{X}(t)=\Omega_{t_l}^{t}(G^{(l+1)})\Omega_{t_{l-1}}^{t_l}(G^{(l)})\overline{X}(t_{l-1}), \tag{18}$$

где за $\overline{X}_0$ принят $\overline{X}(t_{l-1})$.

Учитывая, что $\Omega_{t_{l-1}}^{t_l}(G^{(l)})=\Omega_{t_l^{(0)}}^{t_l}(G^{(l)})\Omega_{t_{l-1}}^{t_l^{(0)}}(G^{(l)})$; $\Omega_{t_l}^{t}(G^{(l+1)})=\Omega_{t_l^{(0)}}^{t}(G^{(l+1)})[\Omega_{t_l^{(0)}}^{t_l}(G^{(l+1)})]^{-1}$,

из выражения (18) получим

$$\overline{X}(t)=\Omega_{t_l^{(0)}}^{t}(G^{(l+1)})\Delta\Lambda^{(l)}\Omega_{t_{l-1}}^{t_l^{(0)}}(G^{(l)})\overline{X}(t_{l-1}), \tag{19}$$

где

$$\Delta\Lambda^{(l)}=[\Omega_{t_l^{(0)}}^{t_l}(G^{(l+1)})]^{-1}\Omega_{t_l^{(0)}}^{t}(G^{(l)}) \tag{20}$$

представляет собой локальное (в пределах интервала $[t_l^{(0)},t_l]$) изменение решения, определяемое зависимостью $t_l(\overline{A})$.

Разложим сомножители правой части (20) в ряды, тогда

$$\Delta\Lambda^{(l)} = [E - \int_{t_l^{(0)}}^{t_l} G^{(l+1)}(\tau, \overline{A}) d\tau][E + \int_{t_l^{(0)}}^{t_l} G^{(l)}(\tau, \overline{A}) d\tau].$$

После перемножения получим

$$\Delta\Lambda^{(l)} = E - \int_{t_l^{(0)}}^{t_l} \Delta G^{(l)}(\tau, \overline{A}) d\tau, \tag{21}$$

где $\Delta G^{(l)}(\tau, \overline{A}) = G^{(l+1)}(\tau, \overline{A}) - G^{l}(\tau, \overline{A}).$

Подинтегральную функцию в (21) представим в виде ряда по времени

$$\Delta G^{(l)}(\tau, \overline{A}) = \Delta G^{(l)}(t_l^{(0)}, \overline{A}) + \left.\frac{d\Delta G^{(l)}(t, \overline{A})}{dt}\right|_{t=t_l^{(0)}} (\tau - t_l^{(0)}) + \ldots \tag{22}$$

При определении линейного разложения в (22) имеет смысл учитывать только первый член, поскольку последующие члены соответствуют более высокому порядку малости.

Из (7) следует, что

$$\Delta G^{(l)}(t_l^{(0)}, \overline{A}) = \Delta G^{(l)}(t_l^{(0)}) + \sum_{k=1}^{s} \Delta G_k^{(l)}(t_l^{(0)}) a_k, \tag{23}$$

где $\Delta G_0^{(l)}(t_l^{(0)}) = G_0^{l+1}(t_l^{(0)}) - G_0^{l}(t_l^{(0)}),\ \Delta G_k^{(l)}(t_l^{(0)}) = G_k^{l+1}(t_l^{(0)}) - G_k^{l}(t_l^{(0)}).$

Подставив (22) и (17), а затем (23) в (21) и проделав необходимые преобразования, получим

$$\Delta\Lambda^{(l)} = E + \sum_{k=1}^{s} \Delta\Lambda_k{}^{(l)} a_k, \tag{24}$$

где

$$\Delta\Lambda_k{}^{(l)} = -\Delta G_0^{(l)}(t_l^{(0)}) \beta_k. \tag{25}$$

Чтобы найти значения скачков коэффициентов, вернемся к (15) и обозначим $t_l^{(0)} - 0$ - время до скачка, а $t_l^{(0)} + 0$ - после скачка. Допустим, что $t + \delta = t_l^{(0)} - 0$, тогда согласно

(19), переход в точку $t_l^{(0)}+0$ осуществляется умножением (15) слева на (24). Результатом умножения и подстановки (25) является

$$\overline{X}(t_l^{(0)}+0)=\overline{X}(t_l^{(0)})+\sum_{k=1}^{s}\overline{\Lambda}_k(t_l^{(0)}+0)a_k,$$

где

$$\overline{\Lambda}_k(t_l^{(0)}+0)=\overline{\Lambda}_k(t_l^{(0)}-0)-\Delta G_0^{(l)}(t_l^{(0)})\overline{X}^{(0)}(t_l^{(0)})\beta_k. \qquad (26)$$

Можно убедиться, что величина скачка в (26) в точности совпадает с результатом, полученным в [3] путем обобщенного дифференцирования.

Теперь выразим β_k, продифференцировав (3) по a_k, как неявную функцию.

$$\beta_k=-\lambda_j^{(k)}(t_l^{(0)}-0)/x_j^{(0)}(t_l^{(0)}-0), \forall k,$$

где $\lambda_j^{(k)}$ элемент $\overline{\Lambda}^{(k)}$.

Прямая и обратная фундаментальные матрицы во всех расчетных формулах на интервале $[t,t+\delta]$ могут быть вычислены по формулам [4]

$$\Omega_t^{t+\delta}(G_0)=E+G_0(t+0,5\delta)\delta+0,5G_0^2(t+0,5\delta)\delta^2+\ldots,$$

$$\left[\Omega_t^{t+\delta}(G_0)\right]^{-1}=E-G_0(t+0,5\delta)\delta+0,5G_0^2(t+0,5\delta)\delta^2-\ldots,$$

где при достаточно малом δ можно ограничиться двумя первыми слагаемыми.

Таким образом, рекуррентные формулы (16) и (25) имеют простую численную реализацию и позволяют последовательно по шагам вычислить номинальные значения фазовых координат и необходимые коэффициенты линейных членов разложения.

2. Иллюстративный пример

В качестве примера рассмотрим систему с одной степенью свободы, закрепленную на подвижном основании. Система изображена на рис. 1, на свободном поле графика.

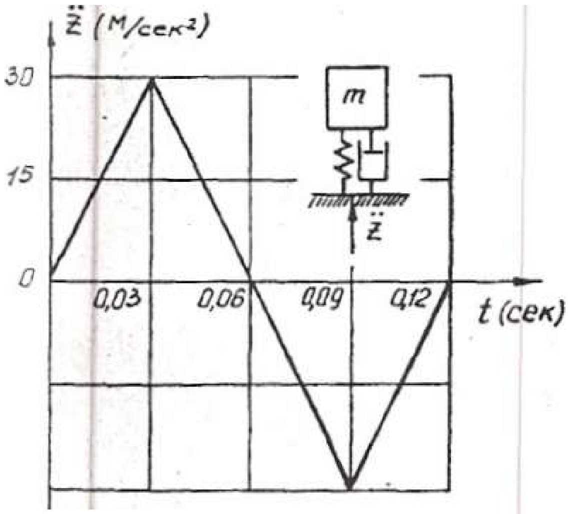

Рис. 1. Изменение ускорения основания от времени

Величина внешнего воздействия задана графиком изменения ускорения основания $\ddot{z}(t)$. Зависимости силы упругой связи $(-b_1 sign\, x)$ и силы демпфера $(-b_2 sign\, \dot{x})$, возникающих от движения тела массой m, имеют кусочно-линейный характер. Известно, что значения параметров $b_1 = 0{,}135\dfrac{H \cdot c}{м}$, $b_2 = 11{,}0\dfrac{H}{м}$ имеют случайный разброс в окрестности номинальных значений. Требуется найти функции чувствительности фазовых координат системы.

Уравнение движения тела представим в виде $m\ddot{x} = -(1+a_1)b_1 sign\, x - (1+a_2)b_2 sign\, \dot{x} - m\ddot{z}(t),$ где a_1 и a_2 - безразмерные вариации параметров b_1 и b_2 соответственно. Для вычисления функций чувствительности $\lambda_1 = \partial x / \partial a_1$ и $\lambda_2 = \partial x / \partial a_2$, представляющих собой линейные члены разложения в ряд фазовых координат системы (перемещения x и скорости $\dot{x}$) по безразмерным вариациям a_1 и a_2 использовались зависимости (16) и (25). На рис. 2 приведены графики функций чувствительности на заданном временном интервале изменения внешней нагрузки.

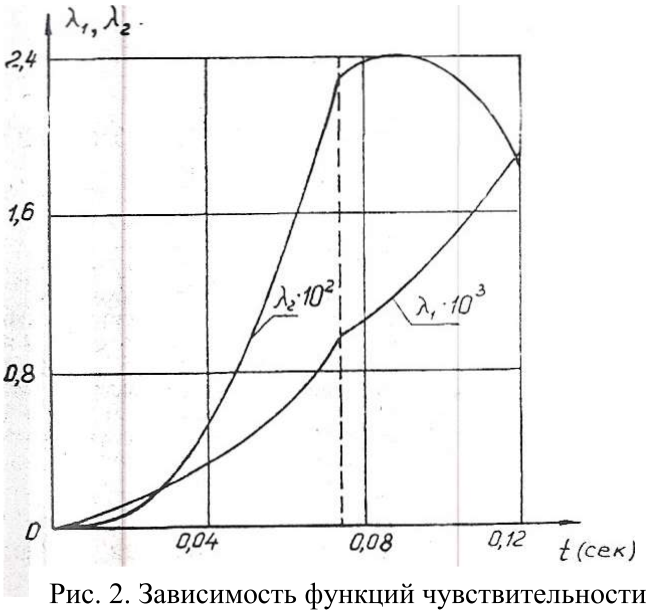

Рис. 2. Зависимость функций чувствительности
фазовых координат системы от времени

Заключение

Результаты, представленные на рис.2, свидетельствуют о возможности применения метода чувствительности и приведенного алгоритма для параметрического анализа динамических характеристик нелинейных механических систем. Важно отметить, что изложенная в статье методика может успешно применяться для вероятностного анализа динамических характеристик нелинейных механических систем. Если количество параметров системы, имеющих случайный разброс значений, достаточно велико, например, более ста, методика позволяет в разы снизить трудоемкость расчетов по сравнению с известным методом статистических испытаний, предусматривающий громоздкую процедуру численного интегрирования цепочных систем дифференциальных уравнений.

Работа поддержана грантом РФФИ №-11-08-00699.

Список литературы

1. Светлицкий В. А. Статистическая механика и теория надежности: учебник для вузов - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 503 с.
2. Гусев А. С. Вероятностные методы в механике машин и конструкций: учебное. пособие для вузов - М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. – 222 с.

3. Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М. Чувствительность систем управления. - М.: Наука, 1981.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.