электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
издатель ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»

Матричная форма дифференциальных уравнений механики деформирования оболочек

77-48211/615562

09, сентябрь 2013

Виноградов Ю. И., Беляев А. В.

УДК 519.6

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
vino.yuri@rambler.ru
beliaev@bmstu.ru

Введение

В ракетно-космической технике часто используются тонкостенные конструкции оболочечной формы. Полная система линейных дифференциальных уравнений механики деформирования оболочек [1-4], как правило, приводится к трем уравнениям в частных производных относительно составляющих перемещений точек их средних поверхностей. Если оболочка замкнута в окружном направлении, система дифференциальных уравнений в частных производных методом Фурье разделения переменных приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую принято называть разрешающей системой дифференциальных уравнений в перемещениях. В статье предложен алгоритм получения уравнений оболочек в матричной форме, применительно к общей технической моментной теории В.З. Власова. Для решения уравнений используется метод матричных рядов [5]. Реализация алгоритма на ЭВМ позволяет проводить анализ прочности тонкостенных оболочечных конструкций с контролируемой погрешностью.

Разрешающая система дифференциальных уравнений

Линейные дифференциальные уравнения общей технической моментной теории В.З. Власова [5] преобразованы в соответствии с обозначениями на рис. 1.

$$\frac{1}{R_1}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{R_1R_2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R_2u\sin\theta\right)+R_1\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w-\frac{1-\nu}{R_2\sin\theta}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{R_1R_2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R_2v\sin\theta\right)-R_1\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right]\right\}+(1-\nu)\left(\frac{u}{R_1R_2}-\frac{1}{R_1R_2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)=0,$$

$$\frac{1}{R_2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{R_1R_2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R_2u\sin\theta\right)+R_1\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right]+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w\right\}+(1-\nu)\frac{1}{R_1}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{2R_1R_2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R_2v\sin\theta\right)-R_1\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right]\right\}+(1-\nu)\left(\frac{v}{R_1R_2}-\frac{1}{R_1R_2\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)=0,$$

$$-\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2}\right)\left\{\frac{1}{R_1R_2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(R_2u\sin\theta\right)+R_1\frac{\partial v}{\partial\phi}\right]+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)w\right\}+ \qquad (1)$$

$$+\frac{1-\nu}{R_1R_2\sin\theta}\left[2w\sin\theta+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(u\sin\theta\right)+\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right]-\frac{h^2}{12}\nabla^2w-\frac{h^2}{12}\nabla^2\nabla^2w=0,$$

где

$$\nabla^2=\frac{1}{R_1R_2\sin\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{R_2\sin\theta}{R_1}\frac{\partial}{\partial\theta}(*)\right]+\frac{R_1}{R_2\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(*)\right\};$$

θ и φ – угловые координаты соответственно вдоль меридиана и параллели; R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны средней поверхности оболочки; u, v, w – составляющие перемещений ее точек по касательным к меридиану, параллели и по внешней нормали; ν – коэффициент Пуассона.

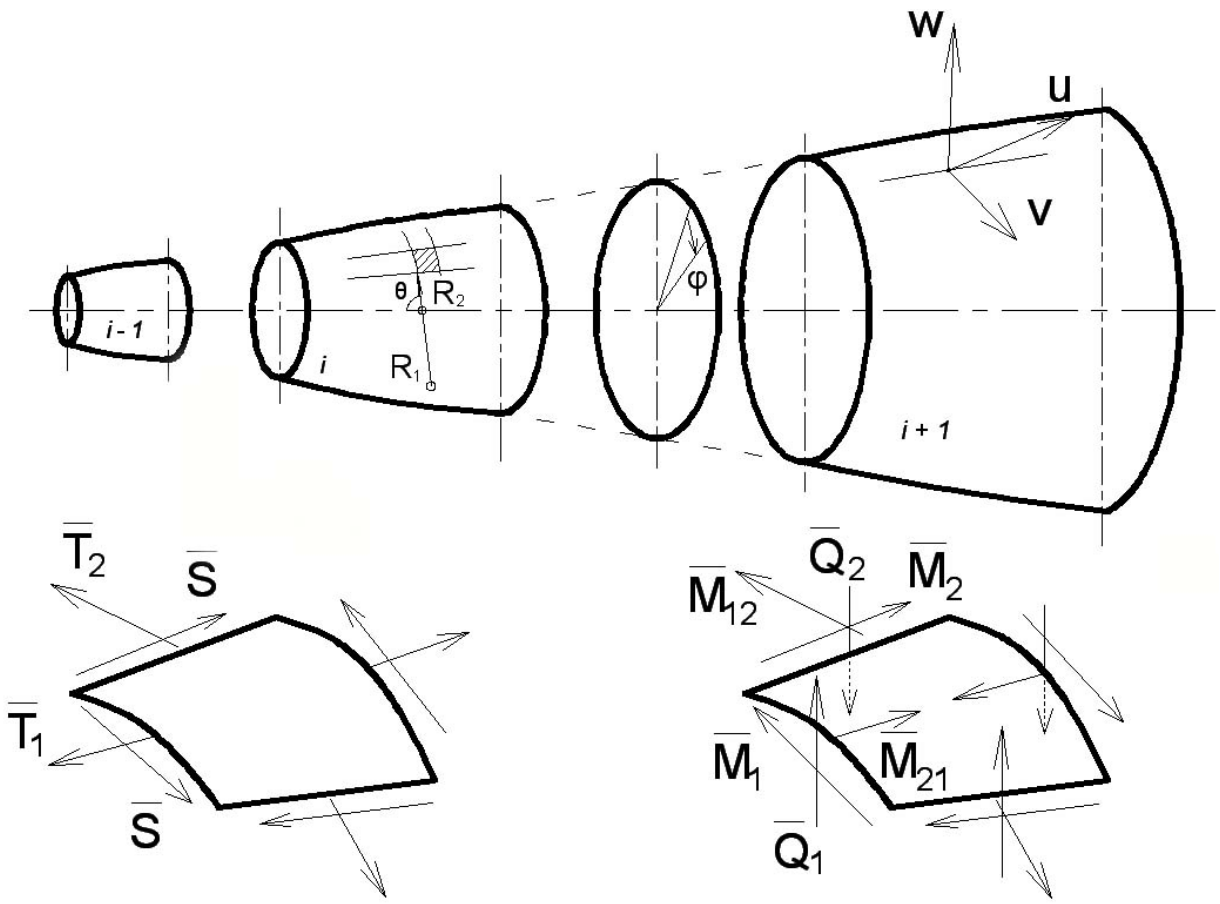

Рис.1 Положительные направления перемещений, сил и моментов
для средней поверхности осесимметричной оболочки

Уравнения механики деформирования оболочек классических форм получаются из общих уравнений (1), если в них положить:

- для цилиндрической оболочки $R_2 = R$, $R_1 \to \infty$, $\sin\theta = 1$;
- для конической оболочки $R_1 d\theta = dx$, $R_2 = x\,\mathrm{tg}\alpha$, $\sin\theta = \cos\alpha$, $R_1 \to \infty$;
- для сферической оболочки $R_1 = R_2 = R$.

Матричная форма дифференциальных уравнений механики деформирования цилиндрических, конических и сферических оболочек

Цилиндрическая оболочка

Оболочка в окружном направлении замкнутая. Внешняя нагрузка симметрична относительно начала окружной координаты φ. Уравнения в частных производных методом Фурье разделения переменных

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cos n\varphi,\ v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin n\varphi,\ w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cos n\varphi \qquad (2)$$

приводятся к обыкновенным. Система обыкновенных дифференциальных уравнений, полученная В.З. Власовым, имеет вид

$$\begin{gathered}\frac{d^2u_n}{d\xi^2}-\frac{1-\nu}{2}n^2u_n+\frac{1+\nu}{2}n\frac{dv_n}{d\xi}+\nu\frac{dw_n}{d\xi}=0,\\ -\frac{1+\nu}{2}n\frac{du_n}{d\xi}+\frac{1-\nu}{2}\frac{d^2v_n}{d\xi^2}-n^2v_n-nw_n=0,\\ \nu\frac{du_n}{d\xi}+nv_n+c^2\left(\frac{d^2}{d\xi^2}-n^2\right)^2w_n+w_n=0,\end{gathered}\tag{3}$$

где u_n, v_n, w_n – функциональные коэффициенты тригонометрических рядов разложений u, v и w (2); $c^2=\dfrac{h^2}{12R^2}$ - малый параметр; R и h – соответственно радиус средней поверхности и толщина цилиндрической оболочки; $\xi=\dfrac{x}{R}$ - безразмерная координата вдоль ее оси.

Систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (3) приводим к системе уравнений первого порядка в матричной форме простейшим алгоритмом. Для этого каждое из уравнений (3) разрешаем относительно старшей производной от u_n, v_n и w_n. Добавляем к ним тождества $u_n' = u_n'$, $v_n' = v_n'$, $w_n' = w_n'$, $w_n'' = w_n''$ и $w_n''' = w_n'''$. Формируем столбец $\boldsymbol{y} = |\, u_n,\ u_n',\ v_n,\ v_n',\ w_n,\ w_n',\ w_n'',\ w_n'''|^T$ и переписываем систему уравнений (3) в матричной форме

$$\boldsymbol{y}' = A\boldsymbol{y},\tag{4}$$

где

$$\begin{gathered}a_{12}=1, a_{21}=\frac{1-\nu}{2}n^2, a_{24}=-\frac{1+\nu}{2}n, a_{26}=-\nu, a_{34}=1, a_{42}=\frac{1+\nu}{1-\nu}n,\\ a_{43}=\frac{2n^2}{1-\nu}, a_{45}=\frac{2n}{1-\nu}, a_{56}=1, a_{67}=1, a_{78}=1, a_{82}=-\frac{\nu}{c^2}, a_{83}=-\frac{n}{c^2},\\ a_{85}=-\left(n^4+\frac{1}{c^2}\right), a_{87}=2n^2.\end{gathered}\tag{5}$$

Физические соотношения [5] с учётом представления погонных усилий T_1, S, Q_1 и M_1 в виде рядов Фурье

$$T_1=\sum_{n=1}^{\infty}T_{1n}\cos n\varphi,\ S=\sum_{n=1}^{\infty}S_n\sin n\varphi\ ,\ Q_1=\sum_{n=1}^{\infty}Q_{1n}\cos n\varphi,\ M_1=\sum_{n=1}^{\infty}M_{1n}\cos n\varphi\tag{6}$$

принимают вид

$$
\begin{aligned}
&T_{1n} = \frac{B}{R}[\frac{du_n}{d\xi} + \nu(nv_n + w_n)],\\
&S_n^* = \frac{B}{R}[-\frac{1-\nu}{2}nu_n + \frac{1-\nu}{2}\frac{dv_n}{d\xi} + (1-\nu)nc^2\frac{dw_n}{d\xi}],\\
&Q_{1n}^* = \frac{D}{R^3}[(2-\nu)n^2\frac{dw_n}{d\xi} - \frac{d^3w_n}{d\xi^3}],\\
&M_{1n} = \frac{D}{R^2}(\frac{d^2w_n}{d\xi^2} - \nu n^2 w_n),\\
&T_{2n} = \frac{B}{R}(\nu\frac{du_n}{d\xi} + nv_n + w_n),\\
&M_{2n} = \frac{D}{R^2}(\nu\frac{d^2w_n}{d\xi^2} - n^2 w_n),
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где $B = \frac{Eh}{1-\nu^2}$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, E - модуль упругости,

$Q_1^* = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{1n}^* \cos n\varphi$, $S^* = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^* \sin n\varphi$ - приведенные по Кирхгофу перерезывающие и сдвигающие погонные усилия в оболочке.

Физические соотношения предлагается представить в матричной форме с добавлением тождества $u_n = u_n$, $v_n = v_n$, $w_n = w_n$, $w_n' = w_n'$:

$$\boldsymbol{t} = G\boldsymbol{y}. \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{t} = |u_n, v_n, w_n, w_n', \overline{T_{1n}}, \overline{S_n}, \overline{Q_{1n}}, \overline{M_{1n}}|^T$,

$$\overline{T_{1n}} = T_{1n}\frac{R}{B},\ \overline{M_{1n}} = M_{1n}\frac{R^2}{D},\ \overline{Q_{1n}} = Q^*_{1n}\frac{R^3}{D},\ \overline{S_n} = S^*_n\frac{R}{B}. \tag{9}$$

При этом ненулевые элементы матрицы G имеют вид

$$
\begin{aligned}
&g_{11} = 1,\ g_{23} = 1,\ g_{35} = 1,\ g_{46} = 1,\ g_{52} = 1,\ g_{53} = n\nu,\ g_{55} = \nu,\\
&g_{61} = -\frac{1-\nu}{2}n,\ g_{64} = \frac{1-\nu}{2},\ g_{66} = (1-\nu)nc^2,\\
&g_{76} = (2-\nu)n^2,\ g_{78} = -1,\ g_{85} = -\nu n^2,\ g_{87} = 1.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

При решении задач для каждого номера n гармоники определяются функциональные коэффициенты $u_n, v_n, w_n, w_n', T_{1n}, S^*_n, Q^*_{1n}, M_{1n}$ тригонометрических рядов искомых величин, характеризующих состояние сечения оболочки при ξ = const. Параметры T_{2n} и M_{2n} для сечения φ = const определяются из соотношений В.З. Власова [5]

$$\overline{T_{1n}} = \frac{\mathrm{d}u_n}{d\xi} + \nu(nv_n + w_n),\ \overline{T_{2n}} = \nu\frac{\mathrm{d}u_n}{d\xi} + nv_n + w_n.$$

Отсюда,

$$\overline{T_{2n}} = \nu\overline{T_{1n}} + (1-\nu^2)(nv_n + w_n), \quad \overline{T}_2 = \sum_n \overline{T_{2n}}\cos n\varphi.$$

Аналогично,

$$\overline{\mathrm{M}_{2n}} = \nu\overline{\mathrm{M}_{1n}} + n^2(\nu^2-1)w_n, \quad \overline{\mathrm{M}_2} = \sum_n \overline{\mathrm{M}_{2n}}\cos n\varphi.$$

Тригонометрические ряды метода Фурье разделения переменных начинаются при n=1. Нулевой член n=0 опущен, так как он соответствует осесимметричному нагружению оболочки. При этом математическая модель – обыкновенные дифференциальные уравнения шестого порядка. При матричной записи уравнений ненулевые элементы матрицы $A=\|a_{ij}\|_1^6$ определяются из матрицы $A=\|a_{ij}\|_1^8$, если положить n=0, а из столбца **y** исключить $v_n = 0$ и $v_n' = 0$. Тогда

$$a_{12}=1,\ a_{24}=-\nu,\ a_{34}=1,\ a_{45}=1,\ a_{56}=1,\ a_{62}=-\frac{\nu}{c^2},\ a_{63}=-\frac{1}{c^2}. \tag{11}$$

Аналогично определяются ненулевые элементы матрицы $G=\|g_{ij}\|_1^6$

$$g_{11}=1,\ g_{23}=1,\ g_{34}=1,\ g_{42}=1,\ g_{43}=\nu,\ g_{56}=-1,\ g_{65}=1. \tag{12}$$

Коническая оболочка

Математическая модель механики деформирования конической оболочки следует из системы дифференциальных уравнений (1) при указанных ее параметрах и записывается в матричной форме (4).

Ненулевые элементы матрицы A определяются предложенным простейшим алгоритмом, как для цилиндрической оболочки. Они имеют вид

$$a_{12}=1,\ a_{21}=(1+\frac{1-\nu}{2}\frac{n^2}{\sin^2\alpha})\frac{1}{\xi},\ a_{22}=-\frac{1}{\xi},\ a_{23}=\frac{(3-\nu)n}{2\sin\alpha}\frac{1}{\xi^2},$$

$$a_{24}=-\frac{(1+\nu)n}{2\sin\alpha}\frac{1}{\xi},\ a_{25}=\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\xi^2},\ a_{26}=\frac{\nu\mathrm{ctg}\alpha}{\xi},\ a_{34}=1,$$

$$a_{41}=\frac{(3-\nu)n}{(1-\nu)\sin\alpha}\frac{1}{\xi^2},\ a_{42}=\frac{(1+\nu)n}{(1-\nu)\sin\alpha}\frac{1}{\xi},$$

$$a_{43}=\frac{2}{1-\nu}(\frac{1-\nu}{2}+\frac{n^2}{\sin^2\alpha})\frac{1}{\xi^2},\ a_{44}=-\frac{1}{\xi},\ a_{45}=\frac{2}{1-\nu}\frac{n\mathrm{ctg}\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\xi^2},$$

$$a_{56}=1,\ a_{67}=1,\ a_{78}=1, \tag{13}$$

$$a_{81}=-\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{c^2\xi^2},\ a_{82}=-\frac{\nu\mathrm{ctg}\alpha}{c^2\xi},\ a_{83}=-\frac{n\mathrm{ctg}\alpha}{c^2\xi^2\sin\alpha},$$

$$a_{85}=-\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{c^2\xi^2}-\frac{1}{\xi^4}[\frac{n^2}{\sin^2\alpha}(\frac{n^2}{\sin^2\alpha}-4)+\mathrm{ctg}^2\alpha(4-\frac{n^2}{\sin^2\alpha})],$$

$$a_{86}=-\frac{1}{\xi^3}(1+\frac{2n^2}{\sin^2\alpha}-3\mathrm{ctg}^2\alpha),\ a_{87}=\frac{1}{\xi^2}(1+\frac{2n^2}{\sin^2\alpha}-\mathrm{ctg}^2\alpha),$$

$$a_{88}=-\frac{2}{\xi^2},$$

где $\xi=\frac{x}{R}$ - безразмерная координата вдоль образующей оболочки, R- радиус ее большего основания.

Ненулевые элементы матрицы G определяются как для цилиндрической оболочки и имеют вид

$$g_{11}=1,\ g_{23}=1,\ g_{35}=1,\ g_{46}=1,\ g_{51}=\frac{\nu}{\xi},\ g_{52}=1,$$

$$g_{53}=\frac{n\nu}{\xi\sin\alpha},\ g_{55}=\frac{\nu\operatorname{ctg}\alpha}{\xi},$$

$$g_{61}=-\frac{(1-\nu)n}{2\xi\sin\alpha},\ g_{63}=-\frac{1-\nu}{2\xi},\ g_{64}=\frac{1-\nu}{2},$$

$$g_{65}=-\frac{c^2(1-\nu)n}{\xi^3\sin\alpha}\operatorname{ctg}\alpha,\ g_{66}=\frac{(1-\nu)nc^2}{\xi^2\sin\alpha}\operatorname{ctg}\alpha, \tag{14}$$

$$g_{75}=\frac{(\nu-3)n^2}{\xi^3\sin^2\alpha},\ g_{76}=[1+(2-\nu)\frac{n^2}{\sin^2\alpha}]\frac{1}{\xi^2},\ g_{77}=-\frac{1}{\xi},$$

$$g_{78}=-1,\ g_{85}=\frac{\nu n^2}{\xi^2\sin^2\alpha},\ g_{86}=\frac{\nu}{\xi},\ g_{87}=1.$$

Внутренние силовые факторы в осевом сечении оболочки определяются рядами Фурье, функциональные коэффициенты которых находятся по формулам

$$\overline{T_{2n}}=\nu\overline{T_{1n}}+(1-\nu^2)(\frac{u_n}{\xi}+\frac{nv_n}{\xi\sin\alpha}+\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\xi}w_n),$$

$$\overline{M_{2n}}=\nu\overline{M_{1n}}+(1-\nu^2)(\frac{1}{\xi}\frac{dw_n}{d\xi}-\frac{n^2}{\xi^2}\frac{w_n}{\sin^2\alpha}).$$

При формировании матриц A и G использовались уравнения равновесия в перемещениях (1) и физические соотношения, которые получены с использованием зависимостей усилий и моментов соответственно от деформаций и параметров изменения кривизн, а последних от перемещений:

$$T_1 = \frac{\mathrm{B}}{R}\left[\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu\left(\frac{u}{\xi} + \frac{1}{\xi \sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\xi} w\right)\right],$$

$$T_2 = \frac{\mathrm{B}}{R}\left[\frac{u}{\xi} + \frac{1}{\xi \sin\alpha}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\xi} w + \nu\frac{\partial u}{\partial \xi}\right],$$

$$M_1 = \frac{\mathrm{D}}{R^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu\left(\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2 \sin^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)\right],$$

$$M_2 = \frac{\mathrm{D}}{R^2}\left[\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2 \sin^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\right], \qquad (15)$$

$$Q^*_1 = \frac{\mathrm{D}}{R^3}\left[-\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \varphi^2}\frac{2-\nu}{\sin^2\alpha} - \frac{\nu\text{-}3}{\xi^3 \sin^2\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right],$$

$$S^*_1 = \frac{\mathrm{B}(1\text{-}\nu)}{R}\left[\frac{1}{2\xi \sin\alpha}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\nu}{2\xi \sin\alpha} + \frac{c^2 \mathrm{ctg}\alpha}{\xi^2}\left(\frac{1}{\xi \sin\alpha}\frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{1}{\sin\alpha}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \varphi}\right)\right].$$

Здесь Q^*_1 и S^* - обобщённые в смысле Кирхгофа перерезывающие и сдвигающие усилия в оболочке, h и R – толщина и радиус большего основания конуса, 2α – угол конуса.

При n=0, то есть при осесимметричном нагружении конической оболочки, ненулевые элементы матриц A и G математической модели ее деформирования имеют вид

$$a_{12} = 1,\ a_{21} = \frac{1}{\xi^2},\ a_{22} = -\frac{1}{\xi},\ a_{23} = \frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\xi^2},\ a_{24} = \frac{\nu \mathrm{ctg}\alpha}{\xi},$$

$$a_{34} = 1,\ a_{45} = 1,\ a_{56} = 1,$$

$$a_{61} = -\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{c^2\xi^2},\ a_{62} = -\frac{\nu \mathrm{ctg}\alpha}{c^2\xi},\ a_{63} = -\frac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\xi^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{4}{\xi^2}\right),$$

$$a_{64} = 3\mathrm{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\xi^3},\ a_{65} = \frac{1}{\xi^2} - \mathrm{ctg}^2\alpha,\ a_{66} = -\frac{2}{\xi^2}; \qquad (16)$$

$$g_{11} = 1,\ g_{23} = 1,\ g_{34} = 1,\ g_{41} = \frac{\nu}{\xi},\ g_{42} = 1,\ g_{43} = \frac{\nu \mathrm{ctg}\alpha}{\xi},$$

$$g_{54} = \frac{1}{\xi^2},\ g_{55} = -\frac{1}{\xi},\ g_{56} = -1,\ g_{64} = \frac{\nu}{\xi},\ g_{65} = 1.$$

Сферическая оболочка

Физические соотношения для сферической оболочки получены на основе зависимостей [5] как для конической оболочки:

$$T_1 = \frac{\mathrm{B}}{R}\left[\frac{\partial u}{\partial \theta} + w + \nu\left(u\mathrm{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w\right)\right],$$

$$T_2 = \frac{\mathrm{B}}{R}\left[u\mathrm{ctg}\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + \nu\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w\right)\right],$$

$$M_1 = \frac{\mathrm{D}}{R^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\left(\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mathrm{ctg}\theta\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right], \qquad (17)$$

$$M_2 = \frac{\mathrm{D}}{R^2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mathrm{ctg}\theta\frac{\partial w}{\partial \theta} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right],$$

$$Q^*_1 = \frac{\mathrm{D}}{R^3}\left[-\frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \mathrm{ctg}\theta\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \left(\nu + \mathrm{ctg}^2\theta - n^2\frac{\nu - 2}{\sin^2\theta}\right)\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{3-\nu}{\sin^2\theta}\mathrm{ctg}\theta\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right],$$

$$S^* = \frac{\mathrm{B}(1\text{-}\nu)}{R}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\mathrm{ctg}\theta}{2}v + \frac{1}{2\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{c^2}{\sin\theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\mathrm{ctg}\theta - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial \varphi}\right)\right].$$

Здесь Θ и φ – угловые координаты, h и R – толщина и радиус оболочки.

Ненулевые элементы матрицы A уравнения (4) получены простейшими алгоритмами, как для цилиндрических и конических оболочек, и имеют вид

$$a_{12}=1,\ a_{21}=\frac{1-\nu}{2}\frac{n^2}{\sin^2\theta}+\nu+\mathrm{ctg}^2\theta,\ a_{22}=-\mathrm{ctg}\theta,\ a_{23}=\frac{(3-\nu)n}{2\sin\theta}\mathrm{ctg}\theta,$$

$$a_{24}=-\frac{(1+\nu)n}{2\sin\theta},\ a_{26}-(1+\nu),\ a_{34}=1,\ a_{41}=\frac{(3-\nu)n}{(1-\nu)sin\theta}\mathrm{ctg}\theta,$$

$$a_{42}=\frac{(1+\nu)n}{(1-\nu)\sin\theta},\ a_{43}=\frac{2n^2}{(1-\nu)\sin^2\theta}-1+ctg^2\theta,\ a_{44}=-ctg\theta,$$

$$a_{45}=\frac{2n(1+\nu)}{(1-\nu)\sin\theta},\ a_{56}=1,\ a_{67}=1, \tag{18}$$

$$a_{78}=1,\ a_{81}=-\frac{1+\nu}{c^2}\mathrm{ctg}\theta,\ a_{82}=-\frac{1+\nu}{c^2},\ a_{83}=-\frac{n(1+\nu)}{c^2\sin\theta},$$

$$a_{85}=\frac{n^2}{\sin^2\theta}[2+\frac{2-n^2}{\sin^2\theta}+2\mathrm{ctg}^2\theta]-\frac{2(1+\nu)}{c^2},$$

$$a_{86}=[-2-(2n^2+1)\frac{1}{\sin^2\theta}]\mathrm{ctg}\theta,\ a_{87}=-1+\frac{2n^2+1}{\sin^2\theta},\ a_{88}=-2\mathrm{ctg}\theta;$$

Ненулевые элементы матрицы G уравнения (8) получены имеют вид

$$g_{11}=1,\ g_{23}=1,\ g_{35}=1,\ g_{46}=1,\ g_{51}=\nu\mathrm{ctg}\theta,\ g_{52}=1,$$

$$g_{53}=\frac{n\nu}{\sin\theta},\ g_{55}=1+\nu,\ g_{61}=-\frac{(1-\nu)n}{2\sin\theta},$$

$$g_{63}=-\frac{(1-\nu)\mathrm{ctg}\theta}{2},\ g_{64}=\frac{1-\nu}{2},\ g_{65}=-\frac{c^2(1-\nu)n}{\sin\theta}\mathrm{ctg}\theta,$$

$$g_{66}=\frac{(1-\nu)nc^2}{\sin\theta},\ g_{75}=-\frac{(3-\nu)n^2}{\sin^2\theta}\mathrm{ctg}\theta,$$

$$g_{76}=\nu+\mathrm{ctg}^2\theta-\frac{(\nu-2)n^2}{\sin^2\theta},\ g_{77}=-\mathrm{ctg}\theta,\ g_{78}=-1, \tag{19}$$

$$g_{85}=-\frac{\nu n^2}{\sin^2\theta},\ g_{86}=\nu\mathrm{ctg}\theta,\ g_{87}=1.$$

Внутренние силовые факторы находятся по формулам как для оболочек других форм

$$\overline{T_{2n}} = \nu\overline{T_{1n}} + (1-\nu^2)(\mathrm{ctg}\,\theta u_n + w_n + \frac{n}{\sin\theta}v_n),$$
$$\overline{M_{2n}} = \nu\overline{M_{1n}} + (1-\nu^2)(\mathrm{ctg}\,\theta\frac{dw_n}{d\theta} - \frac{n^2}{\sin^2\theta}w_n).$$

При решении задач механики осесимметричного деформирования сферических оболочек ненулевые элементы матриц A и G определяются как для оболочек других форм и имеют вид

$$\begin{aligned}
&a_{12}=1,\ a_{21}=\nu+\mathrm{ctg}^2\theta,\ a_{22}=-\mathrm{ctg}\,\theta,\ a_{24}=-(1+\nu),\\
&a_{34}=1,\ a_{45}=1,\ a_{56}=1,\ a_{61}=-\frac{1+\nu}{c^2}\mathrm{ctg}\,\theta, a_{62}=-\frac{1+\nu}{c^2},\\
&a_{63}=-\frac{2(1+\nu)}{c^2},\ a_{64}=-(2+\frac{1}{\sin^2\theta})\mathrm{ctg}\,\theta,\\
&a_{65}=-1+\frac{1}{\sin^2\theta},\ a_{66}=-2\mathrm{ctg}\,\theta;\\
&g_{11}=1,\ g_{23}=1,\ g_{34}=1,\ g_{41}=\nu\mathrm{ctg}\,\theta,\ g_{42}=1,\ g_{43}=1+\nu,\\
&g_{54}=\nu+\mathrm{ctg}^2\theta,\ g_{55}=-\mathrm{ctg}\,\theta,\ g_{56}=-1,\\
&g_{64}=\nu\mathrm{ctg}\,\theta,\ g_{65}=1.
\end{aligned} \tag{20}$$

Пример

Решение дифференциального уравнения (4) имеет вид [6]

$$y = K_{x_0}^{x}(A(x))y_0,\ \text{где}\ y = \left\|u_n, u_n', v_n, v_n', w_n, w_n', w_n'', w_n'''\right\|. \tag{21}$$

Очевидно, что соотношение (8) справедливо для $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0$. Исключая из (8) и (21) $\boldsymbol{y}_0$, получим связь состояний сечений оболочки

$$t = G(x_0)K_{x_0}^{x}(A(x))G^{-1}(x_0)t_0.$$

Полученное соотношение является основой для реализации метода решения краевых задач [7].

Выводы

Получены предложенным простейшим алгоритмом элементы матрицы A матричного разрешающего уравнения в перемещениях (4) для оболочек классических форм (цилиндрических, конических и сферических), решения которых определяются аналитически.

Получены предложенным алгоритмом элементы матрицы G физических соотношений (8) для оболочек классических форм.

Матричная форма представления разрешающих уравнений (4) и физических соотношений (8) позволяет эффективно использовать матричный алгоритм [7, 8] решения краевых задач механики деформирования оболочек классических форм.

Список литературы

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. –М.: Гостехиздат, 1949. – 784.

2. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. –М.: Гос. изд. тех. – теор. лит., 1953. – 544.

3. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.

4. Работнов Ю.Н. Изгиб цилиндрической оболочки сосредоточенной силой. //Докл. АН СССР, 1946. –Т.52. - №4. – С. 110-114.

5. Власов В.З. Избранные труды. –М.: Изд – во АН СССР, 1962.

6. Виноградов Ю.И. Метод решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений//Докл. РАН, 2006. – Т. 409. - №1. –С. 15 – 18.

7. Беляев А. В., Виноградов Ю. И. Модификация метода Годунова решения краевых задач теории оболочек. // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 7. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/597785.html.

8. Беляев А. В., Виноградов Ю. И. Метод решения задач на собственные значения механики деформирования оболочек и тонкостенных конструкций. // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2013. № 8. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/597802.html.