

УДК 621.85:534.013

## Колебания нелинейных систем и построение их амплитудно-частотных характеристик (АЧХ)

*Петров И.П., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
кафедра «Колесные машины»*

*Петухов А.И., студент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
кафедра «Колесные машины»*

*Научный руководитель: Смирнов В.Ф., к.т.н., доцент*

*Россия, 105005, г. Москва, МГТУ им. Н.Э. Баумана  
[kafsm10@sm.bmstu.ru](mailto:kafsm10@sm.bmstu.ru)*

Теория колебаний — громадный раздел современной науки, описывающий различные явления природы. Её применения — не только механические и физические, но и биологические, химические, геологические и даже метеорологические процессы.[1]

Нелинейные колебания представляют собой сложные типы движений, вплоть до хаотических, которые по своим свойствам очень сильно отличаются от малых колебаний линейной системы.[2] При рассмотрении нелинейных колебаний возникает целое множество принципиально новых вопросов и задач, решение которых, собственно, и составляет сам предмет теории нелинейных колебаний. В частности, создание новых устройств с нелинейными зависимостями.

Исследование колебаний связано с решением (интегрированием) дифференциальных уравнений. При преобразовании механической системы в математическую модель могут быть получены дифференциальные уравнения различных типов [3]: линейные — имеют вид:  $A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx + D = 0$ , откуда  $\ddot{x} = -\left[\frac{B}{A}\dot{x} + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}\right]$ , где  $A, B, C, D$  — постоянные величины; нелинейные —  $\ddot{x} = f(\dot{x}, x, \dots)$  где  $f(\dot{x}, x, \dots)$  — произвольная функция.

В частности, коэффициенты в нелинейных уравнениях имеют различные виды, такие как:  $A = A(x)$ ;  $B = B(x, \dot{x})$ ;  $C = C(x)$  и другие функциональные выражения. Далее подробнее о каждом из них.

Рассмотрим первое слагаемое — коэффициент инерции  $A$ . Для приведенной массы  $A(x)$  известно, что если происходит передача движения через зубчатые колёса, то масса от

одного зубчатого колеса приводится к другому через  $(i^2)$  – квадрат передаточного отношения. Например, в подвеске с использованием эллиптических зубчатых колёс – масса будет приводится к корпусу через передаточное отношение этих колёс, соответственно будет нелинейная.

Рассмотрим демпфер (рис. 1) ( $B$  – коэффициент вязкого сопротивления).

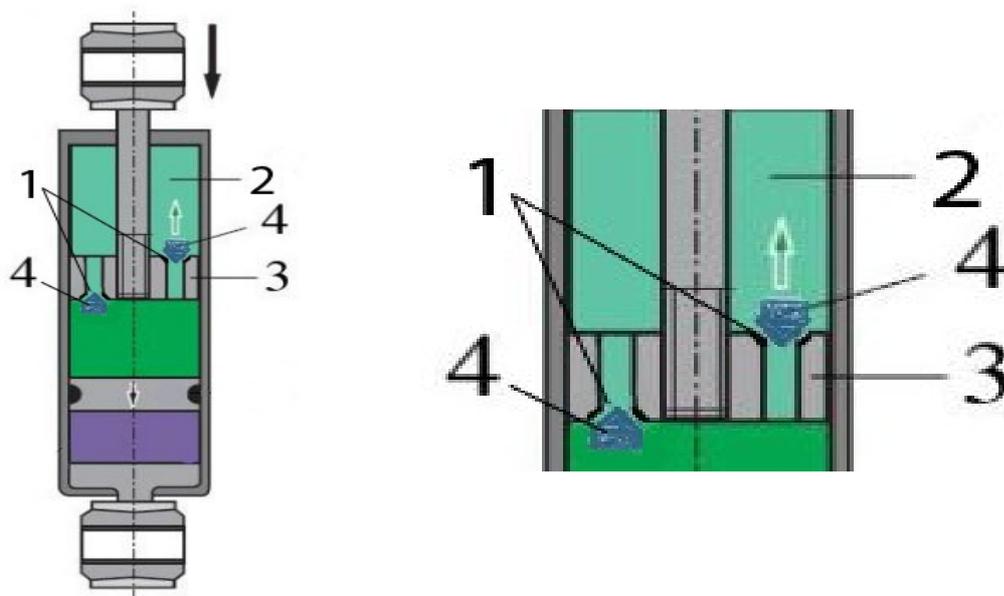


Рис. 1. Гидравлический амортизатор

Отверстие в поршне (1), через которое перетекает рабочая жидкость (2) из одной полости в другую может регулироваться электрическим клапаном (изменяемый диаметр) по какому-либо закону. Это можно осуществить используя конусное отверстие (3) и конусную пробку (4) соответственно. Во время движения поршня пробка перекрывает отверстие – сопротивление увеличивается  $B = B(x)$  зависимость от перемещения. Также, сопротивление зависит от скорости ( $\dot{x}$ ), чем больше значение скорости, тем больше сопротивление перетеканию жидкости -  $B = B(\dot{x})$  [4]

Рассмотрим пружину (рис. 2) (коэффициент  $C$  - жёсткость). Для любых пружин: спиральных, винтовых, тарельчатых, конических, плоских – сила сопротивления нагрузке зависит от перемещения и при посадке витков является нелинейной..

Рессора грузового автомобиля с подрессорником (рис 3а). При нагрузке  $F$  меньшей  $F_0$ , деформируется только основная рессора, при  $F > F_0$  в работу включается так же подрессорник и жёсткость соответственно увеличивается. Зависимость прогиба рессоры от нагрузки на неё показана на рис. 3б.



Рис. 2. Виды пружин

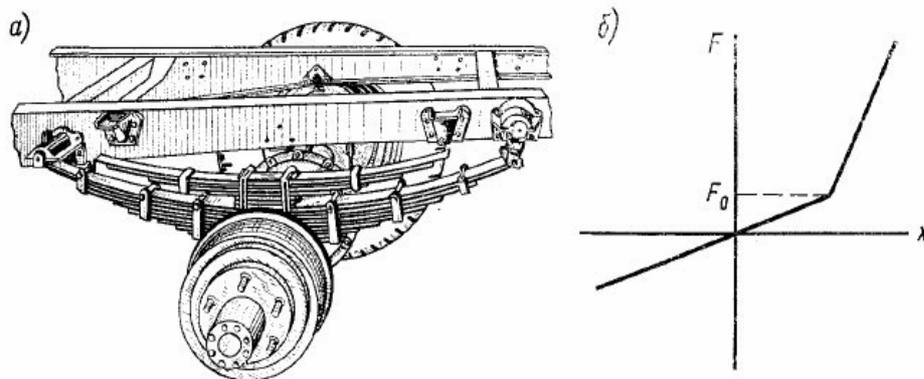


Рис. 3.: а) рессора грузового автомобиля, б) её характеристика

Пружинная муфта (рис.4а). В муфте со змеевидной пружиной с увеличением крутящего момента стальная лента прижимается к зубьям, в связи с чем длина деформируемой части её уменьшается и жёсткость соответственно увеличивается. Зависимость передаваемого момента от угла взаимного поворота половины муфты показана на рис.4б. [5]

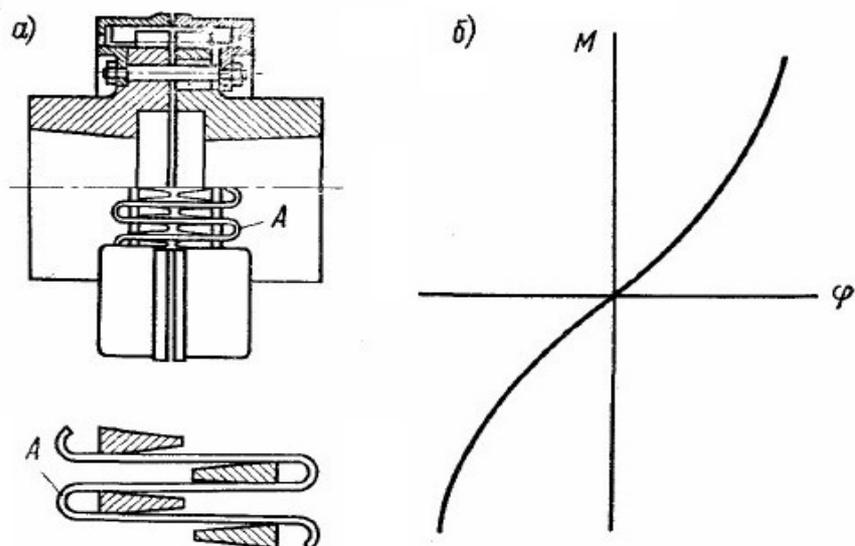


Рис. 4.: а) пружинная муфта, б) её характеристика

Для исследования колебаний, в качестве нелинейной системы используем нелинейную характеристику, которую даёт нам простейший механизм, состоящий из двух эллиптических шестерён (рис. 5) с прямозубым зацеплением (схема).

Проводя аналитический расчёт зависимости угла поворота ведущего и ведомого эллиптического зубчатого колеса, учитывая их геометрические параметры (размеры полуосей). Сначала получаем зависимость угловых скоростей  $\omega_2 = f(\omega_1)$ , затем интегрированием, приходим к необходимой зависимости  $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ :

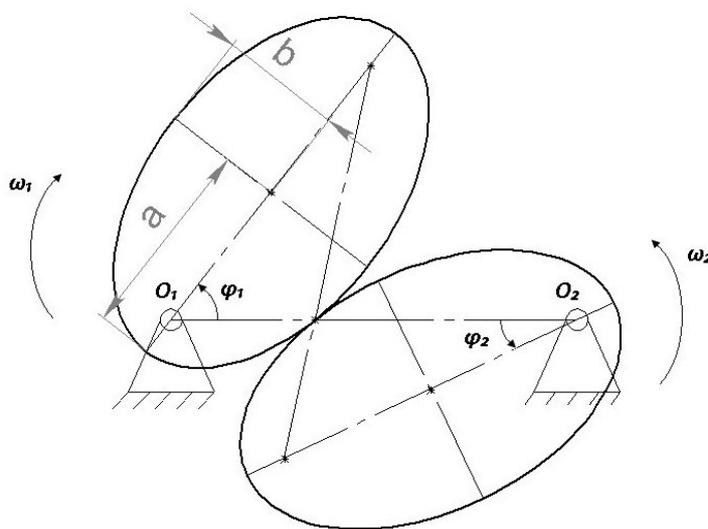


Рис. 5. Схема эллиптических колёс

$$\omega_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\varphi_1) + c^2} \cdot \omega_1$$

$$\varphi_2 = 2 \cdot \arctg \left( \frac{(a + c) \operatorname{tg}(\varphi_1/2)}{a - c} \right)$$

Характеристика изображена на *рис. 6*.

Теперь необходимо экспериментально подтвердить полученный аналитическим способом результат. Для этого последовательно из исходного (нулевого) положения поворачиваем ведущее колесо ( $\varphi_1$ ) на некоторый фиксированный угол ( $d\varphi$ ) и снимаем показания угла поворота ведомого колеса ( $\varphi_2$ ). Так проделываем для двух полных оборотов ведущего колеса (характеристика изображена на *рис. 7*, в сравнении).

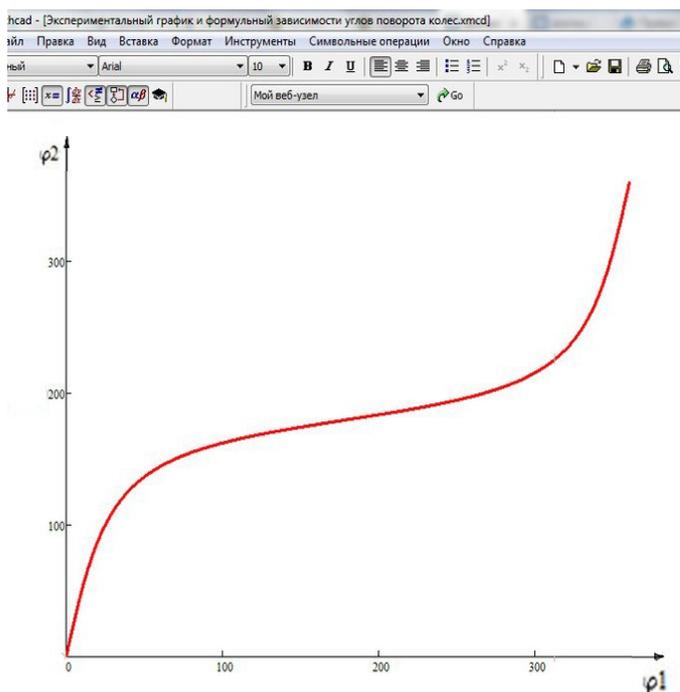


Рис. 6. График теоретической зависимости

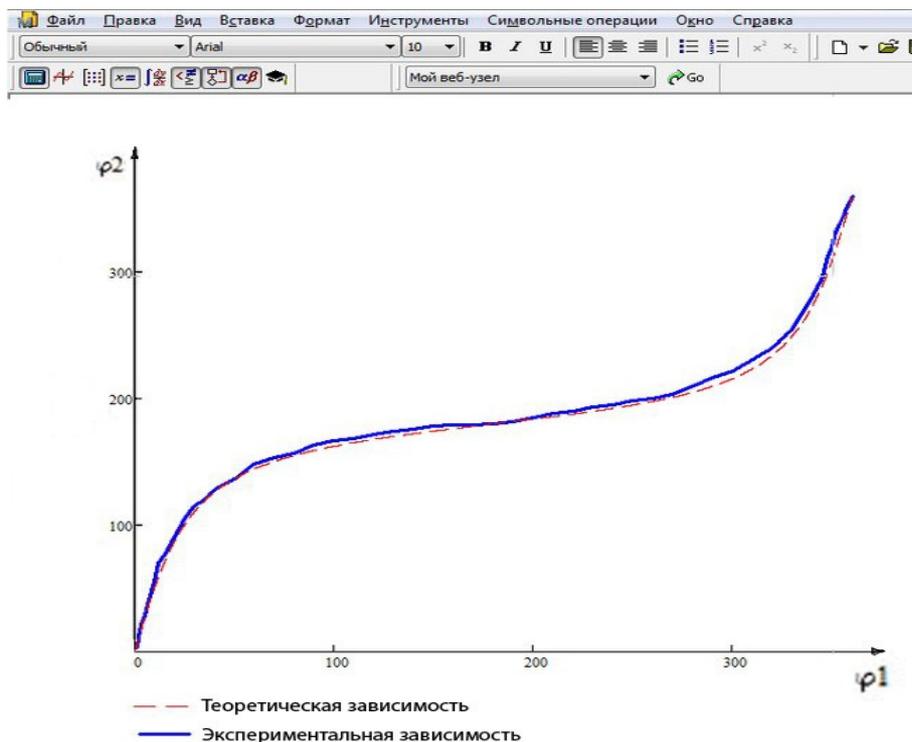


Рис. 7. Графики теоретической и экспериментальной зависимости

Для облегчения вычислительных, графических и аналитических операций, в ходе работы необходимо использовать ЭВМ. Решаем нелинейные уравнения с помощью программы *Math Cad*. Чтобы убедиться в правильности расчётов ЭВМ (выполнения определённых алгоритмов), используем ранее проанализированную нелинейную систему с кубической упругой характеристикой и вязким трением вида:

$$M\ddot{x} + \alpha\dot{x} + cx + \gamma x^3 = P_0\{\cos(\omega t + \varphi)\}$$

Проводим данную операцию для того, чтобы впоследствии введя уже известное решение дифференциального уравнения, получить требуемую графическую зависимость. Решения данного дифференциального уравнения ищутся в виде:  $x = A \sin(\omega t)$ . Опустив некоторые математические выкладки, получаем зависимость  $A(\omega)$  скелетной кривой:

$$\frac{c}{m} + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{\gamma_1}{m}\right) \cdot A^2 = \omega_*^2$$

и амплитудно-частотной характеристики:

$$\omega^2 = \omega_*^2(A) \pm \sqrt{\left[\frac{P_0}{m \cdot A}\right]^2 - 4n^2\omega_*^2(A)}$$

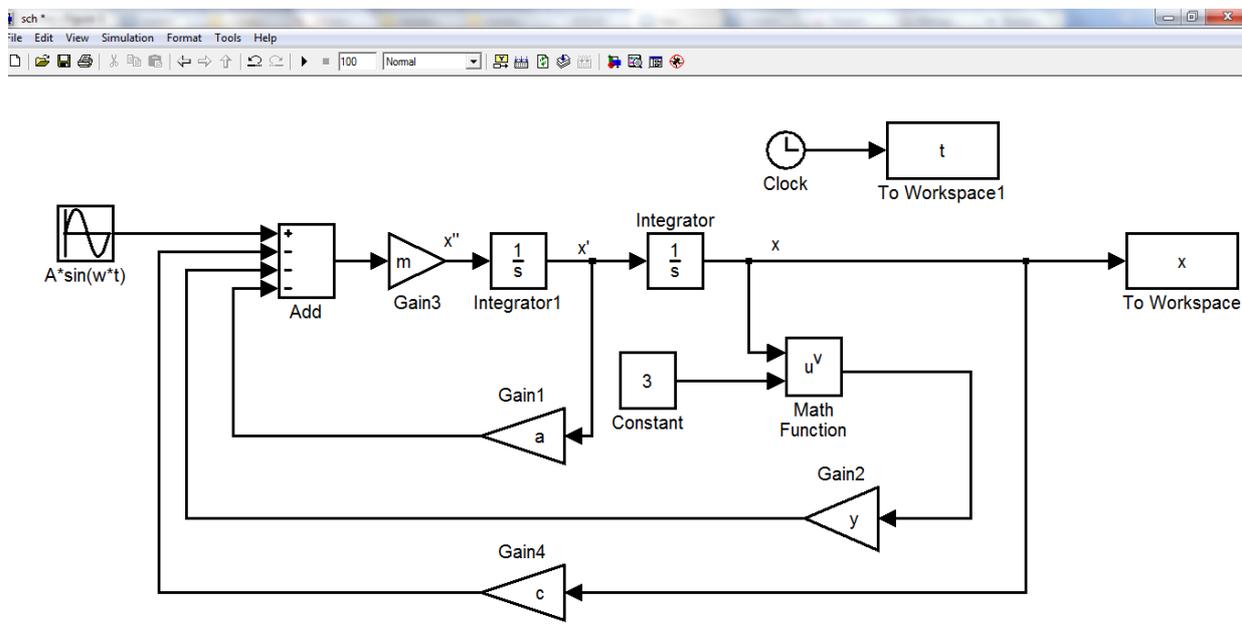


Рис. 8. Математическая модель колебаний

Для решения уравнений, представленных в работе, разработана программа для получения амплитудно-частотной характеристики в системе Matlab.

Идея построения АЧХ в Matlab следует из теории: для каждой частоты вынужденных колебаний определяем амплитуду и строим зависимость  $A(\omega)$ . Более трудоемкая перед нами встала задача автоматизации процесса нахождения амплитуд. Решение АЧХ требовало создание математической модели в системе Matlab Simulink и ее правильной обработки. В результате была создана модель колебаний (рис.8), в процессе симуляции которой программа создавала матрицу обобщенных координат точек в зависимости от времени и частоты колебаний.

В основе модели уравнение нелинейных колебаний вида:

$$m\ddot{x} + a\dot{x} + cx + \gamma x^3 = P_0 \sin(\omega t)$$

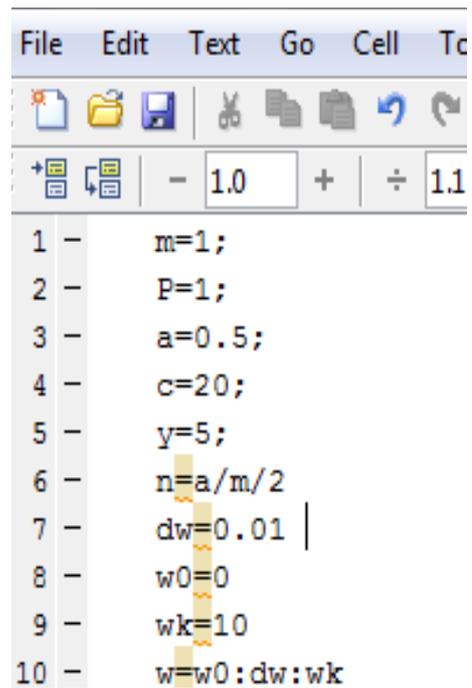
Преобразуем, выразив вторую производную обобщенной координаты:

$$m\ddot{x} = -a\dot{x} - cx - \gamma x^3 + P_0 \sin(\omega t)$$

Для построения модели используем блоки Integrator1 и Integrator2, в параметрах которых записываем начальные условия. На вход в блок Integrator1 подается вторая производная обобщенной координаты  $\ddot{x}$ , на выходе получаем первую производную  $\dot{x}$ , которая подается на вход в блок Integrator2, на выходе получаем  $x$ . В блоке Math Function формируем  $x^3$ . Для получения синусоидального сигнала используем блок Sine Wave. В его параметрах устанавливаем амплитуду  $P_0$  и циклическую частоту колебаний  $\omega$  вынуждающей силы.

Далее, в соответствии с правой частью уравнения (2) суммируем в блоке Add все члены уравнения. Блоки Gain1, Gain2, Gain3 и Gain4 - это усилители (константы) уравнения. Все константы, в том числе  $P_0$  и массив частот  $\omega$  задаются в отдельном м-файле и обрабатываются программой (рис.9).

Вывод матрицы обобщённых координат в систему Matlab осуществляется через блок To Workspace. В строках этой матрицы представлен набор обобщённых координат, изменяющихся со временем. По строкам меняется циклическая частота вынуждающих колебаний.



```

File Edit Text Go Cell To
+ - 1.0 + ÷ 1.1
1 - m=1;
2 - P=1;
3 - a=0.5;
4 - c=20;
5 - y=5;
6 - n=a/m/2
7 - dw=0.01 |
8 - w0=0
9 - wk=10
10 - w=w0:dw:wk

```

Рис. 9. М-файл констант уравнения

Дальнейшая обработка матрицы проводится в отдельном м-файле Matlab, представляющем из себя нахождение максимального элемента матрицы в цикле программы. Таким образом, с помощью данной системы создаются два связанных поэлементно массива амплитуд и частот, по которым строится АЧХ. На графиках показана «жесткая» (рис.10а) и «мягкая» (рис.10б) характеристика, построенная по полученной теоретической формуле (также приведенной в [2]), и с помощью программы. В координатах абсциссы частота  $\omega$ , в координатах ординаты амплитуда  $A$ .

Рассмотрим график жесткой характеристики. На участке RN с увеличением частоты вынуждающей силы плавно возрастает амплитуда колебаний. В точке N кривой графика амплитуда колебаний срывается до точки Q и плавно понижается. Это свидетельствует о том, что для этой модели с данными константами и характеристиками режим NPQ является менее стабильным.

Для нелинейных систем режим PQ является нестабильным и его практически нельзя достигнуть. Колебания, которые бы проходили по дуге NP графика, можно реализовать, плавно повышая частоту вынуждающей силы. Усовершенствование программы, т.е. возможность изменения частоты во время моделирование – является будущей целью и продолжением научной деятельности.

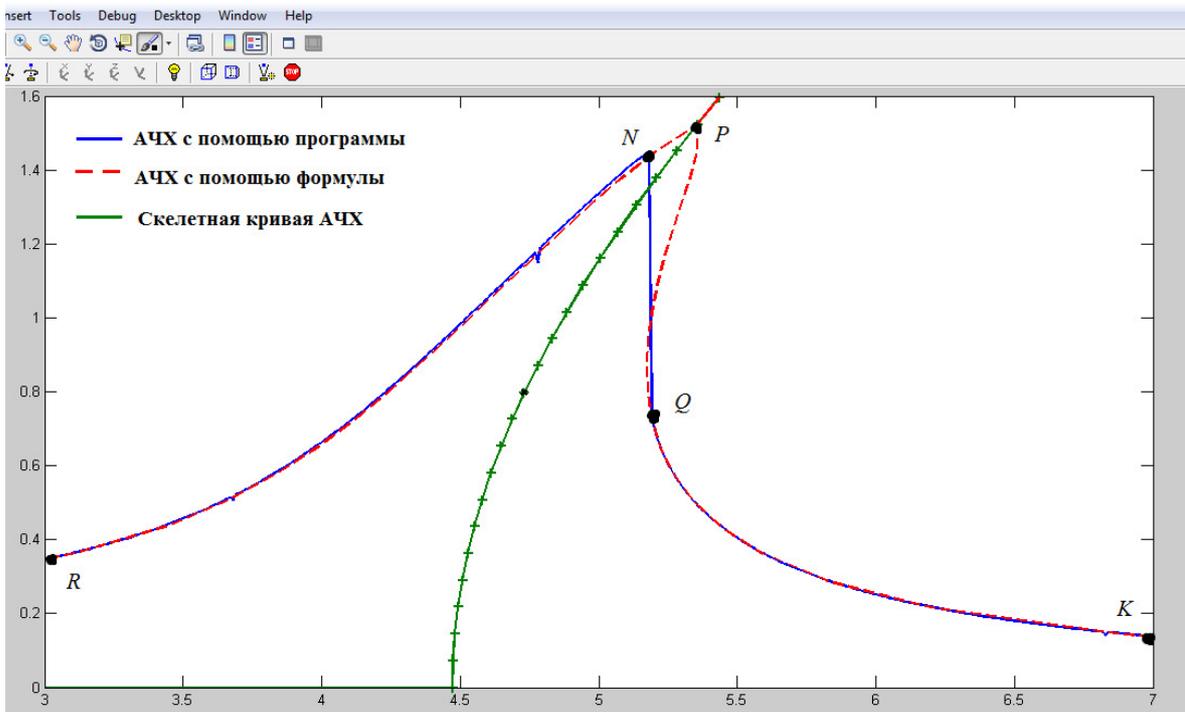


Рис. 10а. Жёсткая АЧХ

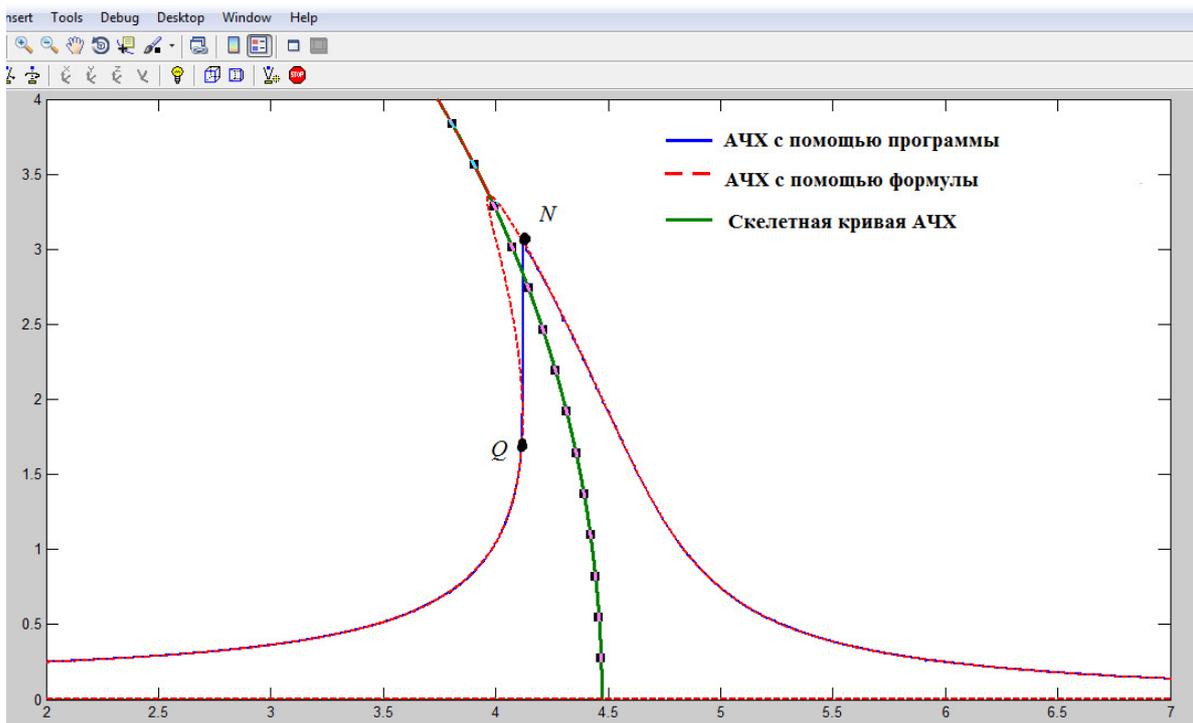


Рис. 10б. Мягкая АЧХ

В результате, изучив оба участка кривой (мягкую, жесткую характеристику), а так же имея созданные математические модели для них, можем анализировать поведение данной нелинейной системы при любых изменениях её параметров (пересчёт на ЭВМ происходит практически мгновенно).

<http://sntbul.bmstu.ru/doc/618362.html>

Механической системы с эллиптическими зубчатыми колёсами можно применять на практике достаточно результативно. Встроив данный механизм в какую-либо колебательную систему (например, прицеп легкового автомобиля или сиденье водителя), можем предотвращать резонансные колебания с большими амплитудами.

Для решения конкретных задач, имеем возможность устанавливать необходимый начальный момент для более эффективного и оптимального гашения колебаний. Это можно достичь за счёт предварительного закручивания упругого элемента, входящего в состав системы (рис. 11).

Например, устанавливая угол закручивания ( $\varphi_0$ ) получаем момент ( $M_0$ ), и из данного положения механическая система может срабатывать как жёсткая (участок BD), так и как мягкая (участок BO). В случае ( $M_{cr1}, \varphi_1$ ), предварительная закрутка определяет мягкую фазу работы (участок AB) и практически линейный участок (AO).

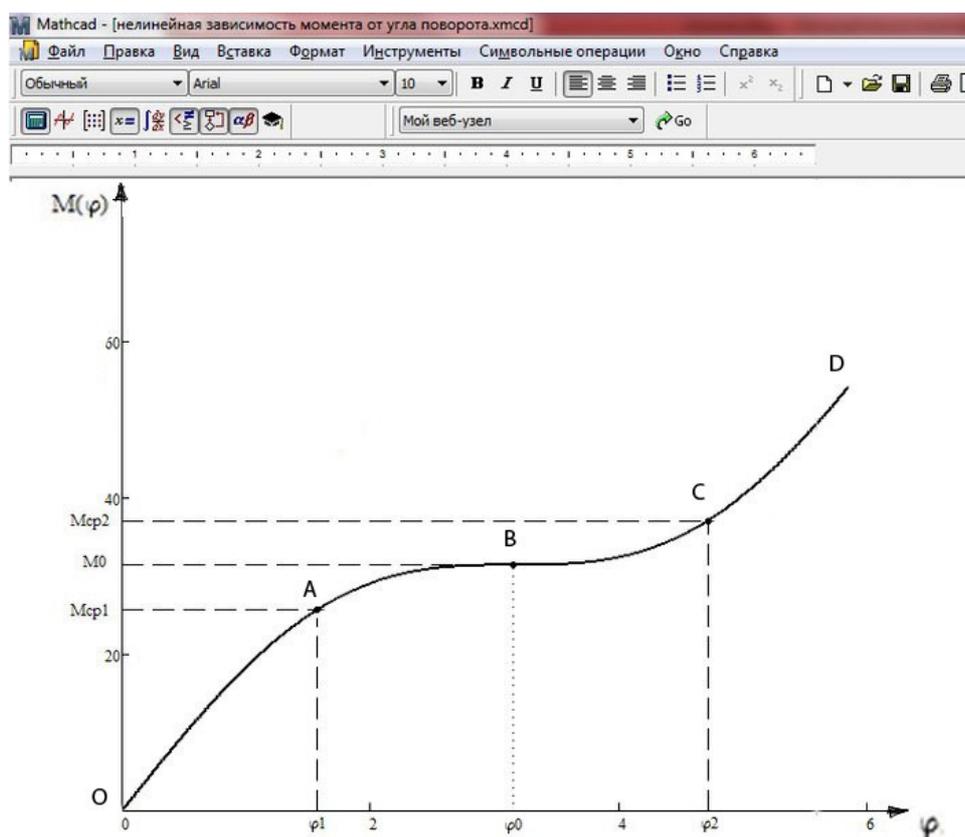


Рис. 11. Характерные точки (участки) нелинейной зависимости

Для дальнейшего исследования предложена одномассовая механическая модель одноосного прицепа легкового автомобиля (рис. 12), созданная в программе САПР SolidWorks.

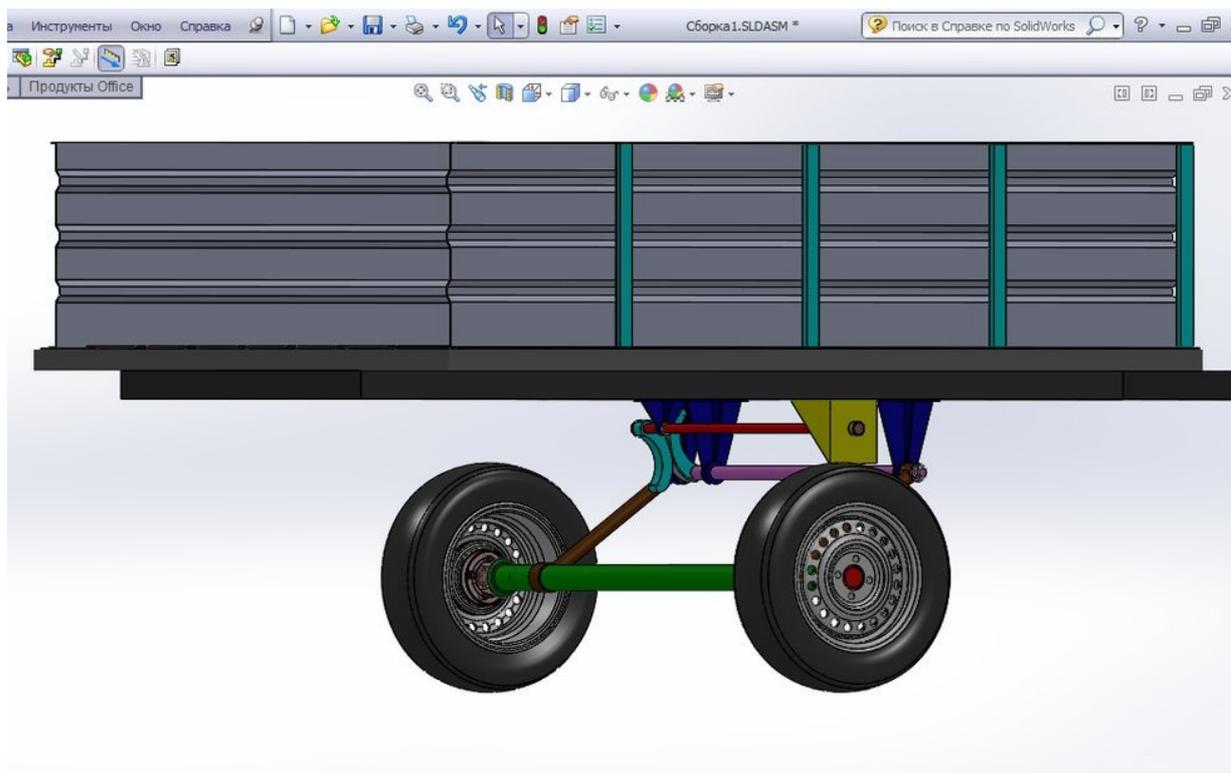


Рис. 12. Механическая модель прицепа

Прицеп, двигаясь по неровной дороге, совершает вынужденные колебания. На *рис. 13* детально показано устройство механизма. В процессе колебаний рычаг (4) совершает возвратно-вращательное движение, вместе с рычажной осью (1). Рычаг сопряжен с осью за счет шлицевого соединения. В роли гасителя колебаний выступают эллиптические колеса (5,6), движение между которыми осуществляется за счет ремня (7). С помощью шлицевого соединения эллиптическое колесо (5) надевается на рычажную ось (1), а эллиптическое колесо (6) надевается на торсион (2). Торсион имеет жесткую заделку (3).

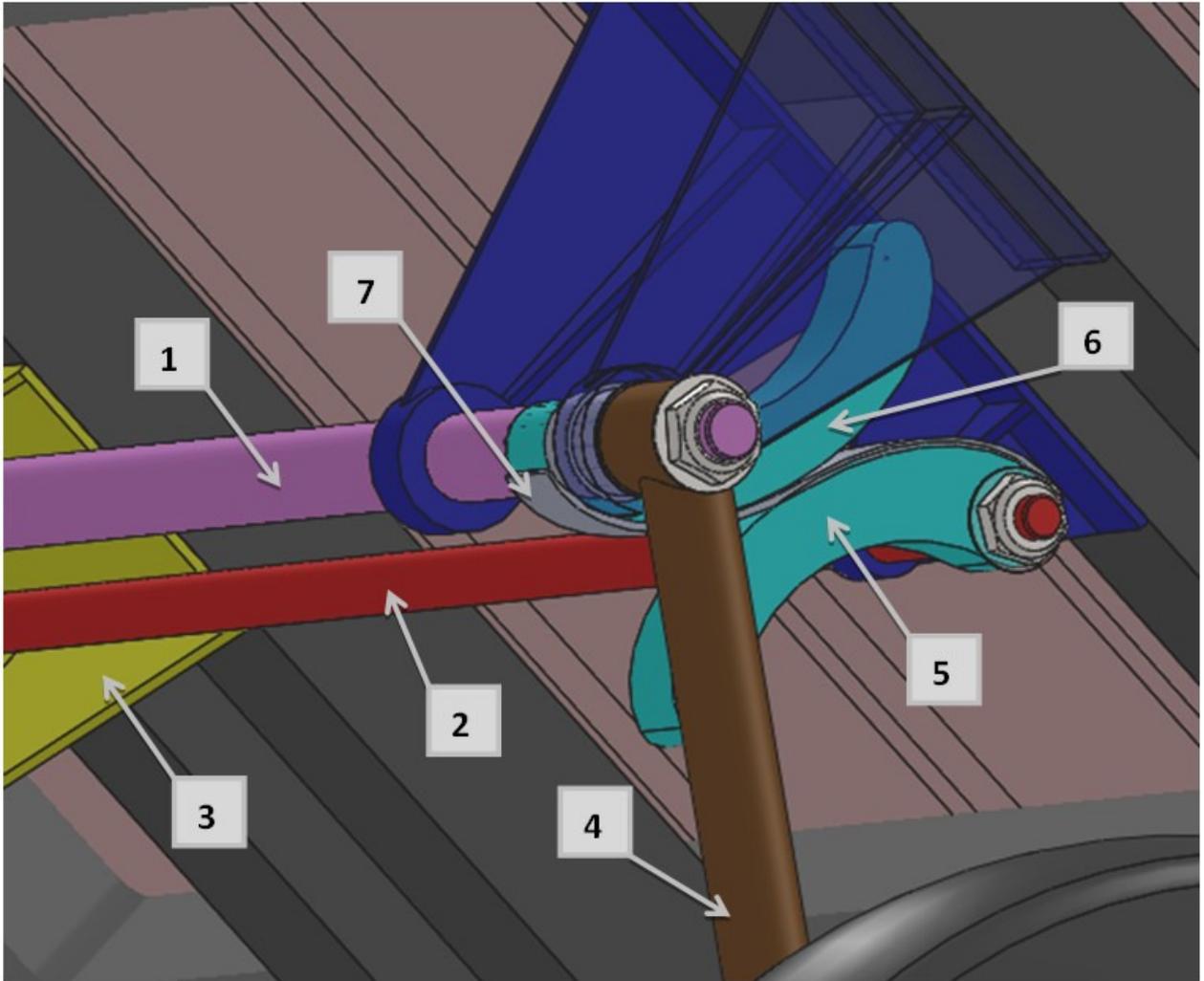


Рис. 13. Устройство подвески прицепа с применением эллиптических колёс

Будут исследованы нелинейные колебания при различном предварительном угле закручивания.

#### Список литературы

1. Ильин М.М., Колесников К. С., Саратов Ю. С. Теория колебаний. - М.: Изд. МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2003 г. - 271 с.
2. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. - М.: Высшая школа, 1972 г. - 416 с.
3. Маслов Г.С. Расчёты колебаний валов. - М.: Машиностроение, 1968 г. - 271 с.
4. Дербаремдикер В.С. Гидравлические амортизаторы автомобилей. - М.: Транспорт, 1969 г. - 237 с.
5. Ротенберг Р.В. Подвеска автомобиля. – М.: Машиностроение, 1972 г. – 392с.
6. Шупляков В.С. Колебания и нагружённость трансмиссии автомобиля. - М.: Транспорт, 1974 г. - 327 с.

7. Дьяконов В. П. Simulink 5/6/7: Самоучитель. – М.: ДМКПресс, 2008. – 784 с.
8. Дьяконов В. П. МАТЛАБ 6.5 SP1/7 + Simulink 5/6. – М.: СОЛОН-Пресс, 2005. – 800с.