

Воздействие гармонической помехи на фазовую автоподстройку второго порядка

05, май 2013

DOI: 10.7463/0513.0551477

Асланов Т. Г.

УДК 621.396

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

tabasik@gmail.com

Введение

Внедрение спутниковых радионавигационных и радиосвязных систем породил повышенный интерес к системам синхронизации, к их точности и помехозащищенности.

Все эти системы работают в условиях воздействия помех [1-3].

Дальнейшее усовершенствование систем синхронизации за счет улучшения конструктивных и технологических решений имеет предел, вызываемый воздействием флуктуаций и помех естественного и искусственного происхождения.

Помехоустойчивости систем синхронизации посвящен ряд работ [4, 5, 7 и др.].

В данной статье путем анализа фазовых портретов ФАП получены уравнения захвата за сигнал и за гармоническую помеху.

1. Влияние гармонической помехи на систему ФАП второго порядка

Функциональная схема ФАП второго порядка приведена на рис. 1,а, где u_v – смесь сигнала и гармонической помехи, u_d – напряжение на выходе фазового детектора (ФД), u_p – напряжение на выходе фильтра, u_r – сигнал управляемого генератора (УГ). Данная схема отличается от схемы первого порядка наличием пропорционально-интегрирующего фильтра (ПИФ) на выходе фазового детектора приведенного на рис. 1,б.

На вход системы воздействует аддитивная смесь сигнала и гармонической помехи. Дифференциальное уравнение ФАП в символической форме имеет вид [6]

$$\sigma x = \Omega_0 - \Omega K(\sigma) [\sin x + \varepsilon \sin(x + \Delta\Omega t_1)], \quad (1)$$

где $\varepsilon = A_{\text{п}}/A_{\text{с}}$ – отношение помеха/сигнал; $A_{\text{с}}, A_{\text{п}}$ – соответственно амплитуды колебаний сигнала и помехи; $t_{1,c}$ – время; Ω – полоса синхронизации ФАП; $\Omega_0 = \omega_{\text{с}} - \omega_0$ – расстройка частоты сигнала $\omega_{\text{с}}$ и частоты УГ ω_0 ; $\Delta\Omega = \omega_{\text{п}} - \omega_{\text{с}}$ – разность частот помехи и сигнала $\sigma = d/dt_1$ – оператор дифференцирования, $K(\sigma)$ – передаточная функция ПИФ.

Дифференциальное уравнение (1) может быть записано в форме

$$\sigma x = \Omega_0 - \Omega K(\sigma) \left\{ \sin x + \varepsilon \sin [x - (\Omega_0 - \Omega_{\text{п}}) t_1] \right\}, \quad (2)$$

где $\omega_{\text{п}} = d\varphi_{\text{п}}/dt_1$; $\varphi_{\text{п}}$ – фаза колебания помехи детектируемая ФД в момент времени t_1 .

Введем обозначения

$$y = x - (\Omega_0 - \Omega_{\text{п}}) t_1; \quad \Phi_1(x, y) = \sin x + \varepsilon \sin y. \quad (3)$$

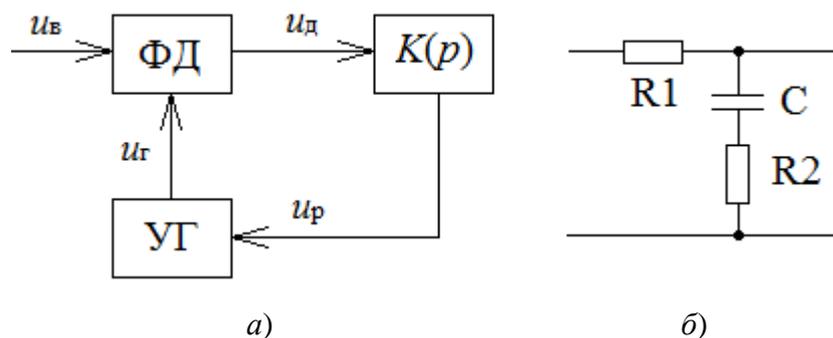


Рис. 1 Функциональная схема ФАП второго порядка

Преобразуем передаточную функцию ПИФ к виду

$$K(\sigma) = (1 + a\tau_{\text{ф}}\sigma) / (c_0 + a\tau_{\text{ф}}\sigma) = a + \xi / (c_0 + a\tau_{\text{ф}}\sigma), \quad (4)$$

где $\xi = 1 + a\tau_{\text{ф}}\sigma$; $\alpha_0^{-2} = \Omega\tau_{\text{ф}}$, $\tau_{\text{ф}}$ – постоянная времени ФНЧ; $c_0 = 1 \vee 0$, $c_0 = 0$ соответствует вырожденному ПИФ.

Тогда второе слагаемое в (1) можно записать в виде

$$K(\sigma)\Phi_1(x, y) = a\Phi_1(x, y) - z; \quad z = -\frac{\xi}{c_0 + \tau_\phi\sigma}\Phi_1(x, y). \quad (5)$$

При условии (3) уравнению (2) можно сопоставить систему из трех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{f}(w), \quad (6)$$

где $w = (x, y, z)^T$; \mathbf{f} – некоторая вектор-функция переменных x, y, z .

Третье уравнение системы сразу получаем из (5)

$$\frac{dz}{dt} = -\alpha_0^2 [c_0 z + \xi\Phi_1(x, y)],$$

где $\alpha_0^2 = 1/\Omega\tau_\phi$.

По уравнению (3) находим

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} - (\beta - \beta_\Pi), \quad (7)$$

где $\beta = \Omega_0/\Omega$; $\beta_\Pi = \Omega_\Pi/\Omega$.

С учетом (3) по уравнению (2) получаем

$$\frac{dx}{dt_1} = \Omega_0 - \Omega \left(a + \frac{\xi}{1 + \tau_\phi\sigma} \right) \Phi_1(x, y).$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \beta - a\Phi_1(x, y) - \frac{\xi}{c_0 + \tau_\phi\sigma}\Phi_1(x, y) = \beta - a\Phi_1(x, y) - z.$$

Обозначим [7]

$$\beta - z = A_0(z),$$

тогда из искомой системы дифференциальных уравнений получим первое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A_0(z) - a\Phi_1(x, y)$$

и с учетом (7) второе дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = B_0(z) - a\Phi_1(x, y); \quad B_0(z) = \beta_{\Pi} - z.$$

Итак, система дифференциальных уравнений (6) окончательно принимает вид [7]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_0(z) - a\Phi_1(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = B_0(z) - a\Phi_1(x, y); \\ \frac{dz}{dt} = -\alpha_0^2 [c_0 z + \xi_5 \Phi_1(x, y)], \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрим частный случай ФАП первого порядка. Тогда при $\alpha_0 \rightarrow \infty$ по третьему уравнению системы получим

$$z = (1 - a)\Phi_1(x, y).$$

В результате по системе из трех дифференциальных уравнений (8) находим систему из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \beta - \Phi_1(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = \beta_{\Pi} - a\Phi_1(x, y). \end{cases}$$

Введем параметр $\lambda = a/\alpha_0^2$, и обозначим $\alpha \equiv \alpha_0^2$. Тогда по (8) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \beta + z - \alpha\lambda(\sin x + \varepsilon \sin y); \\ \frac{dy}{dt} = \beta + \Delta\beta + z - \alpha\lambda(\sin x + \varepsilon \sin y); \\ \frac{dz}{dt} = -\alpha_0^2 [c_0 z + (1 - ac_0)(\sin x + \varepsilon \sin y)], \end{cases} \quad (9)$$

где $\Delta\beta = \beta_{\Pi} - \beta$.

Процедуру усреднения [8] можно применять в случае, если $a \ll 1$, тогда $\alpha \ll 1$, а $\lambda \geq 1$ и сохраняет постоянное значение. В этом случае переменные x и y изменяются быстро, а переменная z – медленно.

Будем искать решение системы дифференциальных уравнений (9) в виде

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \dots; \\ y = y_0 + \alpha y_1 + \alpha^2 y_2 + \dots; \\ z = z_0 + \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 + \dots, \end{cases}$$

т.е. каждую из переменных состояния представляем функциональным рядом с коэффициентами, являющиеся степенями малого параметра α . Будем учитывать нулевое, первое и второе слагаемые функционального ряда и пренебрегать слагаемыми, содержащие α^3 и более высокие степени α . Функции в правой части соотношений для x , y , z зависят от времени явно: $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$, $z_0 = z_0(t)$ и неявно: $x_1 = x_1(x_0, y_0, z_0)$, $y_1 = y_1(x_0, y_0, z_0)$, $z_1 = z_1(x_0, y_0, z_0)$ и т.д.

Пусть также выполняются равенства

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_0 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \dots; \\ \frac{dy}{dt} = Y_0 + \alpha Y_1 + \alpha^2 Y_2 + \dots; \\ \frac{dz}{dt} = \alpha Z_1 + \alpha^2 Z_2 + \dots, \end{cases}$$

т.е. правые части дифференциальных уравнений, описывающих ФАП, так же могут быть представлены в виде функциональных рядов с коэффициентами, которые есть не что иное, как степени малого параметра α . Будем учитывать слагаемые функциональных рядов с нулевого по второе включительно и пренебрегать остальными (нулевое слагаемое функционального ряда для dz/dt , очевидно, равно нулю). Заметим также, что по предположению функции $X_0, X_1, X_2, Y_0, Y_1, \dots$ зависят от времени только неявно: $X_0 = X_0(z_0), Y_0 = Y_0(z_0), Z_1 = Z_1(z_0), \dots$

Получим соотношения, связывающие друг с другом переменные $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ и $X_0, Y_0, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$. Для этого продифференцируем выражения для x, y, z по времени t :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (X_0 + \alpha X_1 + \alpha^2 X_2 + \dots) + \alpha \left[\frac{\partial x_1}{\partial x_0} (X_0 + \alpha X_1 + \dots) + \right. \\ \left. \frac{\partial x_1}{\partial y_0} (Y_0 + \alpha Y_1 + \dots) + \frac{\partial x_1}{\partial z_0} (\alpha Z_1 + \dots) \right] + \alpha^2 \left[\frac{\partial x_2}{\partial x_0} (X_0 + \dots) + \frac{\partial x_2}{\partial y_0} (Y_0 + \dots) \right] + \dots; \\ \frac{dy}{dt} = (Y_0 + \alpha Y_1 + \alpha^2 Y_2 + \dots) + \alpha \left[\frac{\partial y_1}{\partial x_0} (X_0 + \alpha X_1 + \dots) + \right. \\ \left. \frac{\partial y_1}{\partial y_0} (Y_0 + \alpha Y_1 + \dots) + \frac{\partial y_1}{\partial z_0} (\alpha Z_1 + \dots) \right] + \alpha^2 \left[\frac{\partial y_2}{\partial x_0} (X_0 + \dots) + \frac{\partial y_2}{\partial y_0} (Y_0 + \dots) \right] + \dots; \\ \frac{dz}{dt} = (\alpha Z_1 + \alpha^2 Z_2 + \dots) + \alpha \left[\frac{\partial z_1}{\partial x_0} (X_0 + \alpha X_1 + \dots) + \right. \\ \left. \frac{\partial z_1}{\partial y_0} (Y_0 + \alpha Y_1 + \dots) + \frac{\partial z_1}{\partial z_0} (\alpha Z_1 + \dots) \right] + \alpha^2 \left[\frac{\partial z_2}{\partial x_0} (X_0 + \dots) + \frac{\partial z_2}{\partial y_0} (Y_0 + \dots) \right] + \dots \end{array} \right.$$

С другой стороны, справедливы дифференциальные уравнения, задающие модель ФАП. Подставим в их правые части соотношений для x, y, z и разложим функции $\sin x$ и $\sin y$ в ряды Тейлора в окрестности точек x_0 и y_0 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = (\beta + z_0 + \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 + \dots) - \alpha \lambda (\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0) - \\ \quad - \alpha^2 \lambda (\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1) + \dots; \\ \frac{dy}{dt} = (\beta + \Delta\beta + z_0 + \alpha z_1 + \alpha^2 z_2 + \dots) - \alpha \lambda (\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0) - \\ \quad - \alpha^2 \lambda (\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1) + \dots; \\ \frac{dz}{dt} = -\alpha [c_0 (z_0 + \alpha z_1 + \dots) + (1 - ac_0) (\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0) + \\ \quad + (1 - ac_0) \alpha (\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1)] + \dots \end{array} \right.$$

Приравнявая в правых частях выражений для dx/dt , dy/dt и dz/dt слагаемые, содержащие в качестве сомножителей одинаковые степени параметра α , получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = z_0 + \beta; \\ X_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x_0} X_0 + \frac{\partial x_1}{\partial y_0} Y_0 = z_1 - \lambda (\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0); \\ X_2 + \frac{\partial x_1}{\partial x_0} X_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_0} Y_1 + \frac{\partial x_1}{\partial z_0} Z_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_0} X_0 + \frac{\partial x_2}{\partial y_0} Y_0 = z_2 - \lambda (\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_0 = z_0 + \beta + \Delta\beta; \\ Y_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_0} X_0 + \frac{\partial y_1}{\partial y_0} Y_0 = z_1 - \lambda (\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0); \\ Y_2 + \frac{\partial y_1}{\partial x_0} X_1 + \frac{\partial y_1}{\partial y_0} Y_1 + \frac{\partial y_1}{\partial z_0} Z_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_0} X_0 + \frac{\partial y_2}{\partial y_0} Y_0 = z_2 - \lambda (\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1); \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_1 + \frac{\partial z_1}{\partial x_0} X_0 + \frac{\partial z_1}{\partial y_0} Y_0 = -[c_0 z_0 + (1 - ac_0) (\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0)]; \\ Z_2 + \frac{\partial z_1}{\partial x_0} X_1 + \frac{\partial z_1}{\partial y_0} Y_1 + \frac{\partial z_1}{\partial z_0} Z_1 + \frac{\partial z_2}{\partial x_0} X_0 + \frac{\partial z_2}{\partial y_0} Y_0 = -[c_0 z_0 + (1 - ac_0) (\cos x_0 x_1 + \varepsilon \sin y_0 y_1)], \end{array} \right.$$

Теперь необходимо учесть, что если применяется процедура усреднения, то функции x_1 , y_1 , z_1 , x_2 , y_2 , z_2 периодические (с периодом 2π) по переменным x_0 и y_0 , либо зависят от одной из этих переменных. Следовательно,

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x_1(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 = 0$$

и т.п., так как среднее за период значение этих функций учитывается слагаемыми x_0, y_0 и равно нулю.

Проинтегрируем полученные выше уравнения связи функций $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ и $X_0, Y_0, Z_1, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$ в пределах $[0; 2\pi]$ по x_0, y_0 , разделив полученные равенства на $4\pi^2$. Тогда ясно, что

$$\begin{cases} X_0 = z_0 + \beta; \\ X_1 = 0; \\ X_2 = -\lambda I; \end{cases} \quad \begin{cases} Y_0 = z_0 + \beta + \Delta\beta; \\ Y_1 = 0; \\ Y_2 = -\lambda I; \end{cases} \quad \begin{cases} Z_1 = c_0 z_0; \\ Z_2 = -(1 - ac_0)I, \end{cases}$$

где $I = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1) dx_0 dy_0$.

С учетом полученных равенств уравнения связи упрощаются:

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial x_0}(z_0 + \beta) + \frac{\partial x_1}{\partial y_0}(z_0 + \beta + \Delta\beta) = z_1 - \lambda(\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0); \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_0}(z_0 + \beta) + \frac{\partial y_1}{\partial y_0}(z_0 + \beta + \Delta\beta) = z_1 - \lambda(\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0); \\ \frac{\partial z_1}{\partial x_0}(z_0 + \beta) + \frac{\partial z_1}{\partial y_0}(z_0 + \beta + \Delta\beta) = -(1 - ac_0)(\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_2}{\partial x_0}(z_0 + \beta) + \frac{\partial x_2}{\partial y_0}(z_0 + \beta + \Delta\beta) = c_0 z_0 \frac{\partial x_1}{\partial z_0} + z_2 - \lambda(\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1 - I); \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_0}(z_0 + \beta) + \frac{\partial y_2}{\partial y_0}(z_0 + \beta + \Delta\beta) = c_0 z_0 \frac{\partial y_1}{\partial z_0} + z_2 - \lambda(\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1 - I); \\ \frac{\partial z_2}{\partial x_0}(z_0 + \beta) + \frac{\partial z_2}{\partial y_0}(z_0 + \beta + \Delta\beta) = c_0 z_0 \frac{\partial z_1}{\partial z_0} - [c_0 z_1 + (1 - ac_0)(\cos x_0 x_1 + \varepsilon \cos y_0 y_1 - I)]. \end{cases}$$

Исключая из трех первых уравнений функцию z_1 , убеждаемся, что

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_0^2}(z_0 + \beta)^2 + \frac{\partial^2 x_1}{\partial y_0^2}(z_0 + \beta + \Delta\beta)^2 + 2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_0 \partial y_0}(z_0 + \beta)(z_0 + \beta + \Delta\beta) = \\ & = -\lambda \cos x_0 (z_0 + \beta) - \lambda \varepsilon \cos y_0 (z_0 + \beta + \Delta\beta) - (1 - ac_0)(\sin x_0 + \varepsilon \sin y_0). \end{aligned}$$

Аналогичное уравнение справедливо для функции y_1 .

Чтобы $I \neq 0$, необходимо, чтобы функция $x_1 = x_1(x_0, y_0, z_0)$ не зависела от y_0 или по крайней мере содержала слагаемое, не зависящее от y_0 : $x_1 = \bar{x}_1(x_0, z_0) + \dots$ Тогда умножая последнее дифференциальное уравнение в частных производных на $\cos x_0$, интегрируя в пределах $[0; 2\pi]$ по x_0 и y_0 , и, наконец, разделив результат на $4\pi^2$, получаем

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos x_0 x_1(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{x}_1(x_0, z_0) \cos x_0 dx_0 = \frac{\lambda}{2(z_0 + \beta)}.$$

Аналогично, чтобы $I \neq 0$, необходимо, чтобы функция $y_1 = y_1(x_0, y_0, z_0)$ не зависела от x_0 или по крайней мере содержала слагаемое, не зависящее от x_0 : $y_1 = \bar{y}_1(y_0, z_0) + \dots$ Тогда умножая последнее дифференциальное уравнение в частных производных на $\cos y_0$, интегрируя в пределах $[0; 2\pi]$ по x_0 и y_0 , и, наконец, разделив результат на $4\pi^2$, получаем

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos y_0 y_1(x_0, y_0, z_0) dx_0 dy_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{y}_1(y_0, z_0) \cos y_0 dy_0 = \frac{\lambda \varepsilon}{2(z_0 + \beta + \Delta\beta)}.$$

Отсюда имеем

$$I = \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{z_0 + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{z_0 + \beta + \Delta\beta} \right).$$

Таким образом, найдены явные выражения через z_0 для функций X_0, Y_0, Z_1 , доказано, что $X_1=0, Y_1=0$. Теперь с учетом явного выражения интеграла I через z_0 получаем соотношения для функций X_2, Y_2, Z_2 :

$$X_2 = -\lambda I = -\frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1}{z_0 + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{z_0 + \beta + \Delta\beta} \right);$$

$$Y_2 = -\lambda I = -\frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{1}{z_0 + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{z_0 + \beta + \Delta\beta} \right);$$

$$Z_2 = -(1 - ac_0)I = -(1 - ac_0) \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{z_0 + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{z_0 + \beta + \Delta\beta} \right).$$

Следовательно, можно записать систему дифференциальных уравнений для функций x_0, y_0, z_0 , правые части которой согласно сделанным предположениям зависят только от функций X_0, Y_0, X_1, Y_1, Z_1 и X_2, Y_2, Z_2 :

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = \beta + z_0 - \frac{\lambda^2}{2} \alpha \left(\frac{1}{z_0 + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{z_0 + \beta + \Delta\beta} \right); \\ \frac{dy_0}{dt} = \beta + \Delta\beta + z_0 - \frac{\lambda^2}{2} \alpha \left(\frac{1}{z_0 + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{z_0 + \beta + \Delta\beta} \right); \\ \frac{dz_0}{dt} = -\alpha c_0 z_0 - (1 - ac_0) \frac{\lambda}{2} \left(\frac{1}{z_0 + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{z_0 + \beta + \Delta\beta} \right). \end{cases} \quad (10)$$

Система дифференциальных уравнений (10) является усредненной системой дифференциальных уравнений, решение которой аппроксимирует истинное решение системы дифференциальных уравнений, задающей модель ФАП, с точностью до слагаемых порядка α . Нетрудно убедиться, что усредненная система дифференциальных уравнений проще исходной. В дальнейшем рассматривается только эта система дифференциальных уравнений, по свойствам которой будем судить о свойствах ФАП второго порядка при наличии гармонической помехи.

При $c_0=1$ (невырожденный ПИФ) нельзя провести аналитическое интегрирование последнего уравнения усредненной системы (10). Однако при больших значениях постоянной времени ПИФ можно пренебречь величиной c_0 и положить $c_0=0$, что соответствует вырожденному ПИФ. Рассмотрим последнее дифференциальное уравнение системы (10) при этом условии:

$$\frac{dz_0}{dt} = -\frac{\lambda}{2} \alpha^2 \left(\frac{1}{z_0 + \beta} + \frac{\varepsilon^2}{z_0 + \beta + \Delta\beta} \right).$$

Разделяя переменные и производя интегрирование, находим

$$\frac{z_0^2}{2} + z_0 \left(\beta + \frac{\varepsilon^2 \Delta\beta}{1 + \varepsilon^2} \right) - \frac{(\Delta\beta)^2 \varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)^2} \ln \left| z_0 + \beta + \frac{\Delta\beta}{1 + \varepsilon^2} \right| + C = -(1 + \varepsilon^2) \lambda \alpha^2 t / 2,$$

где C – произвольная постоянная. Если положить

$$V = \frac{1 + \varepsilon^2}{\Delta\beta} (z_0 + \beta),$$

то получим

$$\frac{V^2}{2\varepsilon^2} + (V - \ln|1 + V|) + \bar{C} = -(1 + \varepsilon^2)^3 \frac{\lambda}{2} \alpha^2 \frac{1}{\varepsilon^2 (\Delta\beta)^2} t,$$

где \bar{C} – новая произвольная постоянная, связанная с C соотношением

$$\bar{C} = \frac{C}{\varepsilon^2} - \ln \left| \frac{\Delta\beta}{1 + \varepsilon^2} \right| - \frac{\beta(1 + \varepsilon^2)}{\Delta\beta} \left[1 + \frac{\beta(1 + \varepsilon^2)}{2\Delta\beta\varepsilon^2} \right].$$

Введем также новое время

$$\tau = (1 + \varepsilon^2)^3 \frac{\lambda^2}{2} \alpha^2 \frac{1}{\varepsilon^2 (\Delta\beta)^2} t.$$

Тогда окончательно получаем

$$\frac{V^2}{2\varepsilon^2} + (V - \ln|1 + V|) + \bar{C} = -\tau;$$

$$\frac{dV}{d\tau} = -\frac{\varepsilon^2 (1 + V)}{V \left[V + (1 + \varepsilon^2) \right]}.$$

Зависимости $V(\tau)$ могут быть заданы только неявно. Функция $-\tau(V)$ имеет два минимума в точках $V = 0$ и $V = -(1 + \varepsilon^2)$, а также вертикальную асимптоту в точке

$V = -1$. На рис. 2 приведены графики функций $-\tau(V)$ при $\bar{C} = 0$ и различных ε : $\varepsilon=0.6$ (рис. 2, а), $\varepsilon=1$ (рис. 2, б) и $\varepsilon=1.4$ (рис. 2, в).

Результаты представлены на рис. 3, а-в. Для различных значений \bar{C} (4; 0; -4) заметим также, что из выражения для производной $dV/d\tau$ следует, что функция $V(\tau)$ возрастает при $-\infty < V < (1 + \varepsilon^2)$, $-1 < V < 0$ и убывает при $(1 + \varepsilon^2) < V < -1$, $0 < V < \infty$. Направление изменения функции $V(\tau)$ с ростом τ показано на рис. 3 стрелками.

В результате можно сделать вывод, что, задав начальный момент времени τ_0 и начальное значение переменной $V(\tau)$, равное V_0 , можно однозначно определить решение дифференциального уравнения для переменной $V(\tau)$, соответствующее данным начальным условиям. Процесс поиска такого решения показан на рис. 3 штрихпунктирными линиями. Если $V_0 < -1$, то процесс изменения переменной $V(\tau)$ заканчивается в точке $V = -(1 + \varepsilon^2)$ или же $z_0 = -\beta - \Delta\beta$, при этом, как следует из второго дифференциального уравнения усредненной системы, установившееся значение переменной z_0 компенсирует первоначальную частотную расстройку между помехой и свободными колебаниями генератора, входящего в состав ФАП, т.е. происходит захват за помеху. Если $V_0 > -1$, то процесс изменения переменной $V(\tau)$ заканчивается в точке $V = 0$ (или $z_0 = -\beta$). При этом, как следует из первого дифференциального уравнения усредненной системы, установившееся значение переменной z_0 компенсирует первоначальную частотную расстройку между сигналом и свободными колебаниями генератора, т.е. происходит захват за сигнал. Задав начальное значение переменной $z_0(t)$, равное $z_0^{(0)}$, из неравенства

$$V_0 = \frac{1 + \varepsilon^2}{\Delta\beta} (z_0^{(0)} + \beta) < 1$$

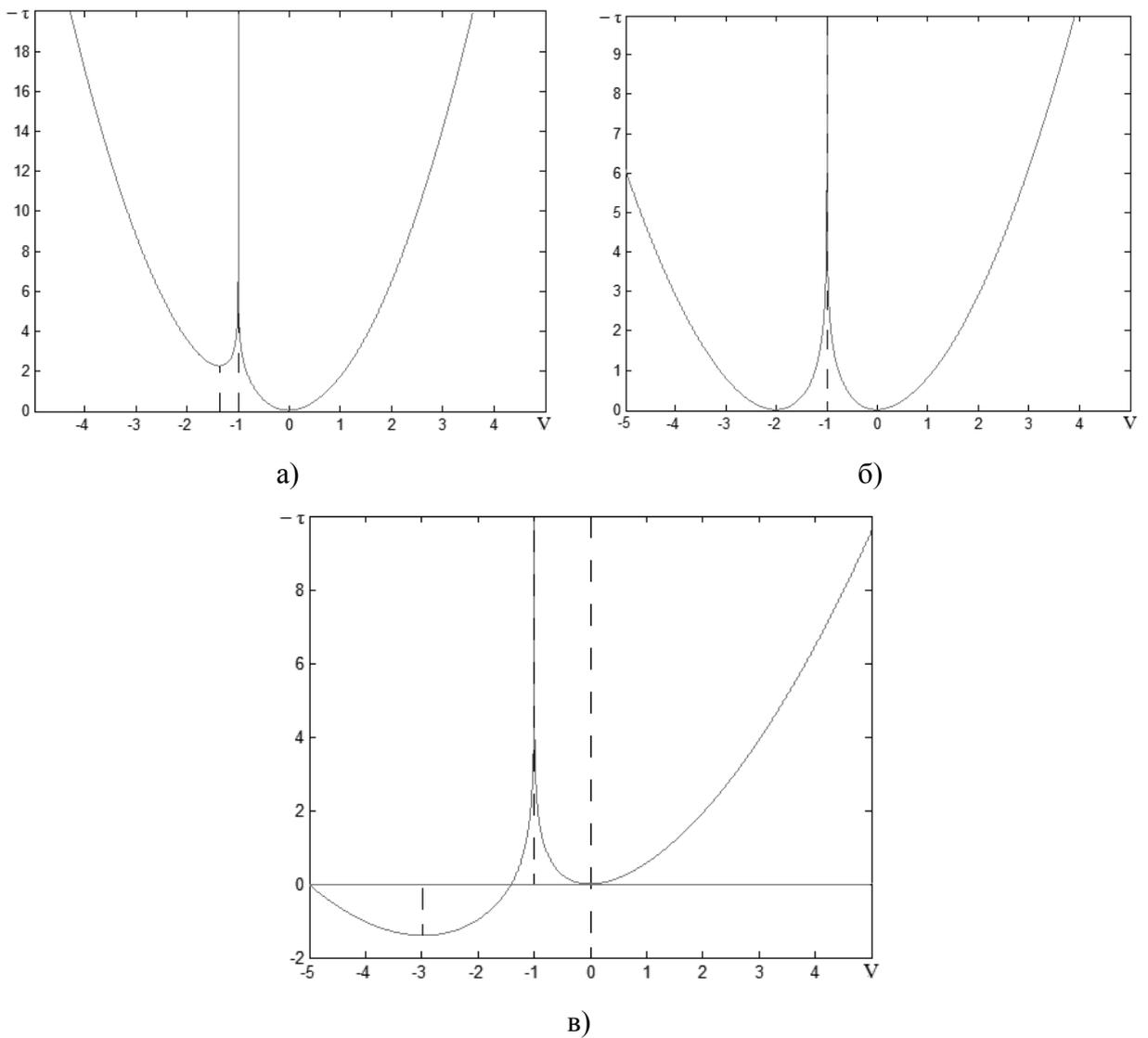


Рис. 2. Графики зависимости функции $-\tau$ от V при различных значениях ε

можно определить границы области захвата за помеху на плоскости параметров $(\beta, \Delta\beta)$:

$$\begin{cases} \beta < -z_0^{(0)} - \frac{\Delta\beta}{1+\varepsilon^2} \text{ при } \Delta\beta > 0; \\ \beta > -z_0^{(0)} - \frac{\Delta\beta}{1+\varepsilon^2} \text{ при } \Delta\beta < 0. \end{cases}$$

Аналогично определяются границы области захвата за сигнал:

$$\begin{cases} \beta > -z_0^{(0)} - \frac{\Delta\beta}{1+\varepsilon^2} \text{ при } \Delta\beta > 0; \\ \beta < -z_0^{(0)} - \frac{\Delta\beta}{1+\varepsilon^2} \text{ при } \Delta\beta < 0. \end{cases}$$

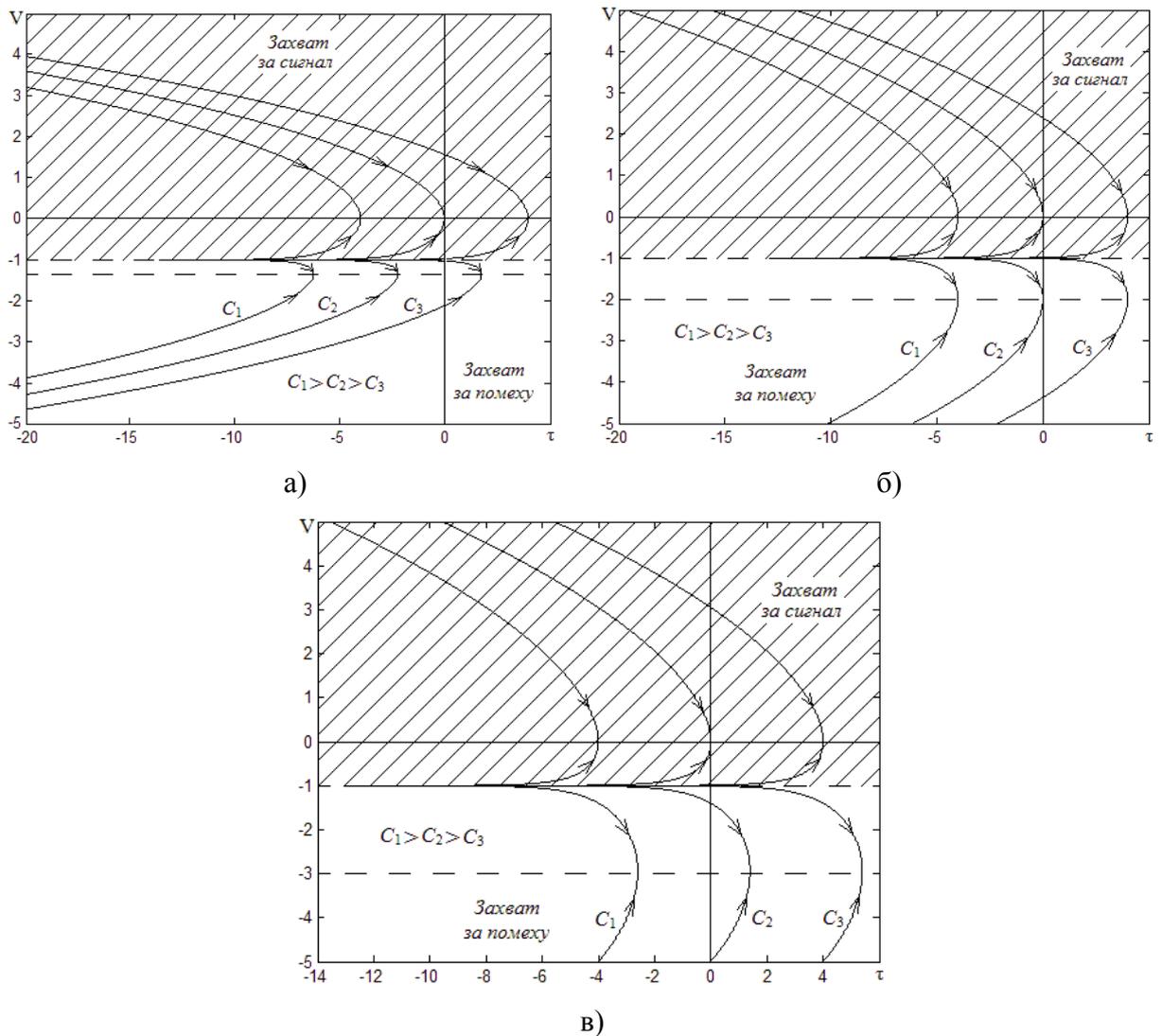


Рис. 3 Графики зависимости функции $-τ$ от V при различных значениях $ε$ и C

На рис. 4 приведена бифуркационная диаграмма ФАП второго порядка при наличии гармонической помехи на плоскости параметров $(β, Δβ)$, если начальное значение переменной $z_0(t)$ равно $z_0^{(0)}$.

Из полученной диаграммы следует, что режим работы системы определяется не только частотными расстройками сигнала и помехи (параметры $β$ и $Δβ$), но и начальным значением переменной z_0 . Это говорит о том, что на режим захвата оказывает влияние предыстория работы системы.

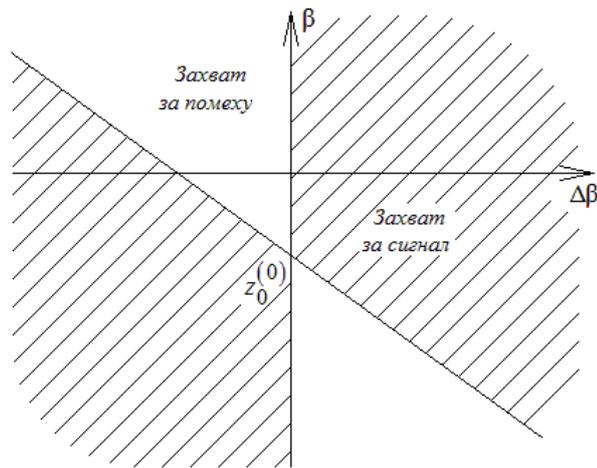


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма ФАП второго порядка

Из диаграммы также следует, если система находится в режиме захвата за сигнал ($z_0^{(0)} = \beta$), то перейти в режим захвата за помеху она не может ни при каких ϵ и $\Delta\beta$. Однако, с практической точки зрения помеха должна оказывать влияние на процесс синхронизации. Для исследования этого влияния обратимся к численному решению системы дифференциальных уравнений (9).

Проведенное методом Рунге-Кутты четвертого порядка численное решение системы (9) показало, что при определенной интенсивности помехи происходит ее захват. Поиск критических значений $\Delta\beta$ проводился при условии, что система осуществляет слежение за сигналом ($z_0^{(0)} = \beta$) и при отсутствии сигнальной частотной расстройки ($\beta=0$). На рис. 5 квадратными метками показаны критические значения $\Delta\beta$, при которых происходит смена режима захвата.

При малых значениях $\Delta\beta$ ($\approx 0,1$) и близких амплитудах сигнала и помехи ($\epsilon \approx 1$) в системе возникают асинхронные движения (заштрихованная область на рис. 5). ФАП не может осуществить захвата ни помехи, ни сигнала, а осуществляет синхронизацию на некоторой промежуточной частоте.

С учетом полученных результатов бифуркационная диаграмма при $\epsilon=2$ принимает вид рис. 6. Здесь в отличие от рис. 4 имеется участок, на котором происходит захват помехи (при $\epsilon > 1$) при любых значениях β и $z_0^{(0)}$.

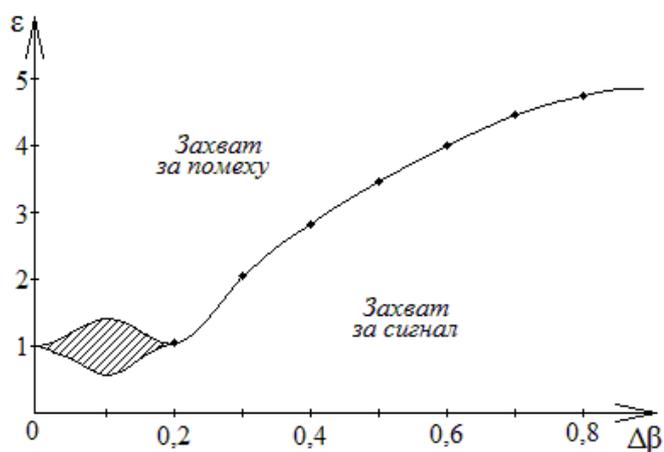


Рис. 5 График зависимости ϵ от β

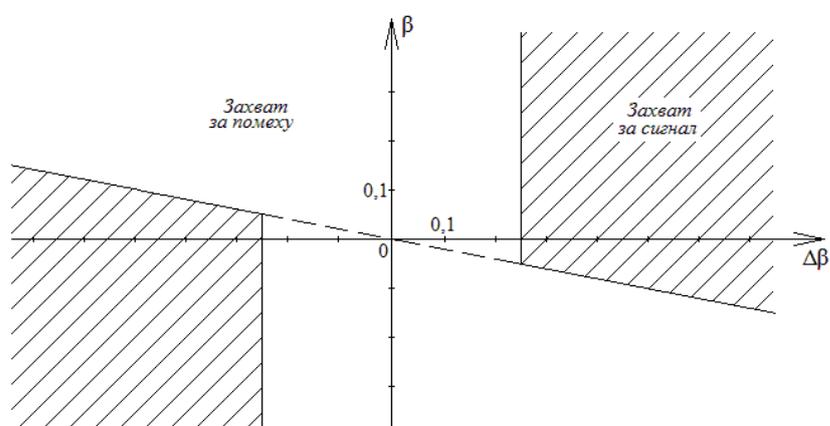


Рис. 6 Бифуркационная диаграмма ФАП

Характер движений, возникающих в системе при различной интенсивности помехи, иллюстрируют рис. 7-8, где изображены проекции фазовой траектории на плоскости (x,y) , (x,z) , (y,z) . Рис. 7 соответствует режиму захвата за сигнал ($\Delta\beta=0,1$; $\epsilon=0,6$; $a=0,8$; $\alpha=0,16$), рис. 8 – режиму захвата за помеху ($\Delta\beta=0,1$; $\epsilon=1,4$ $a=0,8$; $\alpha=0,16$).

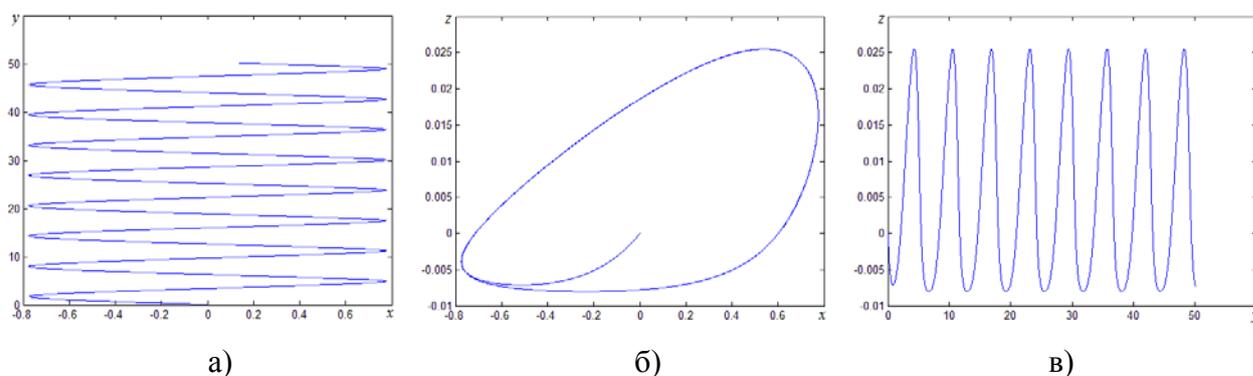


Рис. 7. Проекция фазовой траектории на плоскости в режиме захвата сигнала

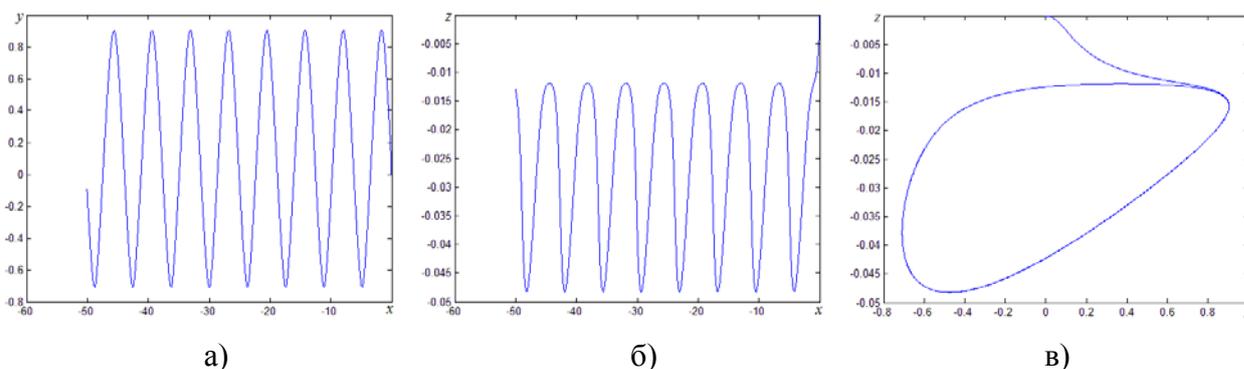


Рис. 8. Проекция фазовой траектории на плоскости в режиме захвата помехи

Используемый численный метод решения системы дифференциальных уравнений позволяет получить зависимости, аналогичные рис. 5, в случае невырожденного ПИФ в кольце ФАП ($c_0=1$). Параметры системы аналогичны случаю вырожденного ПИФ ($a=0,05$; $\alpha=0,01$). Сравнивая рис. 9 с рис. 5, можно заметить, что характер зависимости практически не изменился, отличие состоит лишь в размерах области неустойчивой синхронизации при малых $\Delta\beta=0,1$ и $\varepsilon\approx 1$. Это подтверждает, что при больших τ_ϕ можно без больших потерь рассматривать случай вырожденного ПИФ в кольце ФАП.

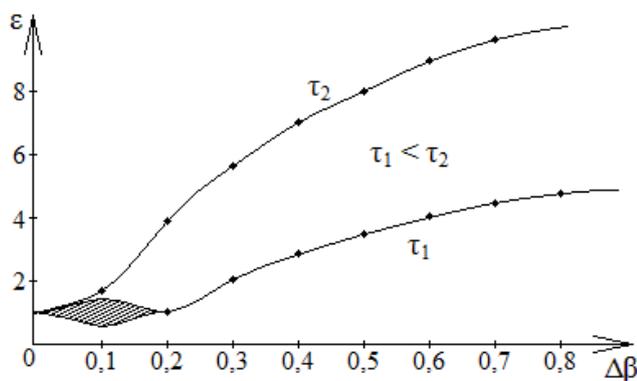


Рис. 9. График зависимости ε от β

Рассмотрим влияние полосы пропускания ПИФ на процессы захвата сигнала или помехи. На рис. 9 треугольными метками показаны результаты численных расчетов при $a=0,01$; $\alpha=0,005$, что соответствует увеличению постоянной времени ПИФ в пять раз по сравнению с предыдущем случаем. Из полученных зависимостей следует, что увеличение постоянной времени фильтра (уменьшение полосы пропускания) повышает помехоустойчивость системы. Однако, при малых $\Delta\beta$ достаточно незначительного

превышения амплитуды помехи над амплитудой сигнала, чтобы произошел захват за помеху.

В заключение рассмотрим определение времени переходного процесса, т.е. промежутка времени, за которой ФАП компенсирует первоначальную частотную расстройку и произойдет захват за сигнал либо за помеху.

Пусть $V_0 > 1$ или, что то же самое, $(1 + \varepsilon^2)(z_0^{(0)} + \beta)/\Delta\beta > -1$. Тогда конец процесса регулирования частоты – это достижение точки $V=0$ и захвата за сигнал. Зависимость $V(\tau)$, соответствующая такому процессу, соединяет точки (τ_0, V_0) и (τ_k, V_k) . При этом $\tau_k - \tau_0 = \Delta\tau$ – длительность переходного процесса; $V_k = 0$, τ_0, V_0 и τ_k, V_k – соответственно начальные и конечные значения переменных τ и V . Так как обе точки лежат на одной и той же кривой, то

$$\begin{cases} \frac{V_0^2}{2\varepsilon^2} + (V_0 - \ln|1+V_0|) + \bar{C} = -\tau_0; \\ \frac{V_k^2}{2\varepsilon^2} + (V_k - \ln|1+V_k|) + \bar{C} = -\tau_k. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, имеем длительность переходного процесса при захвате за сигнал

$$\Delta\tau = \frac{V_0^2}{2\varepsilon^2} + (V_0 - \ln|1+V_0|); \quad V_0 > -1.$$

Аналогично из равенств

$$\begin{cases} \frac{V_0^2}{2\varepsilon^2} + (V_0 - \ln|1+V_0|) + \bar{C} = -\tau_0; \\ \frac{V_k^2}{2\varepsilon^2} + (V_k - \ln|1+V_k|) + \bar{C} = \frac{(1 + \varepsilon^2)^2}{2\varepsilon^2} + \bar{C} - 2 \ln \varepsilon - (1 + \varepsilon^2) = -\tau_k, \end{cases}$$

вытекающих из того факта, что при $V_0 < -1$ и захвате за помеху зависимость $V(\tau)$, соответствующая процессу регулирования частоты, соединяет точки (τ_0, V_0) и (τ_k, V_k) ,

причем $V_k = -(1 + \varepsilon^2)$, может быть получена длительность переходного процесса при захвате за помеху:

$$\Delta\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{V_0}{\varepsilon} + \varepsilon \right)^2 + \ln \left| \frac{\varepsilon^2}{1 + V_0} \right|; \quad V_0 < -1.$$

Приложение

Найдем критические значения первой гармоники $x_1 = x_{1k}$ и отношения помеха/сигнал $\varepsilon = \varepsilon_k$, которые определяют условия срыва синхронизации:

$$\sin x_0 = \pm 1; \quad \cos x_0 = 0. \quad (\text{П.1})$$

При учете второго условия по уравнению

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2 M^2 J_0^2}{F_1^2 + F_2^2} = \frac{\varepsilon^2 J_0^2}{d^2 \left[\left(\frac{\cos x_0}{dx_1} 2J_1 + \frac{\sin P}{M} \right)^2 + \left(\frac{\cos P}{M} \right)^2 \right]},$$

находим $x_{1k}^2 = \varepsilon_k^2 M^2 / d^2$. Отсюда следует

$$\varepsilon_k^2 = x_{1k}^2 d^2 / M^2.$$

При учете первого равенства в (П.1), находим

$$x_{1k}^2 = \left(\frac{\gamma}{M_0} \mp 1 \right) \frac{2M}{d \cos P}.$$

Подставляя это значение x_{1k}^2 в (П.1) окончательно получим

$$\varepsilon_k^2 = \frac{2d}{M \cos P} \left(\frac{\gamma}{M_0} \mp 1 \right) = \frac{2d}{M \cos P} \left(\frac{\gamma}{M_0} + \operatorname{sgn} d \right).$$

Зависимость $\varepsilon_k^2 = f(d)$ при $a=0.8$ и $\alpha_0^{-2} = 6.25$ изображена на рис. П.1, где прямая 1 получена при ФАП 1-го порядка и $\beta=0$; прямая 2 при невырожденном и вырожденном фильтре и $\beta=0$; 3 – ФАП 1-го порядка $\beta=0.8$; 4 - невырожденный и вырожденный фильтр и $\beta=0.8$;

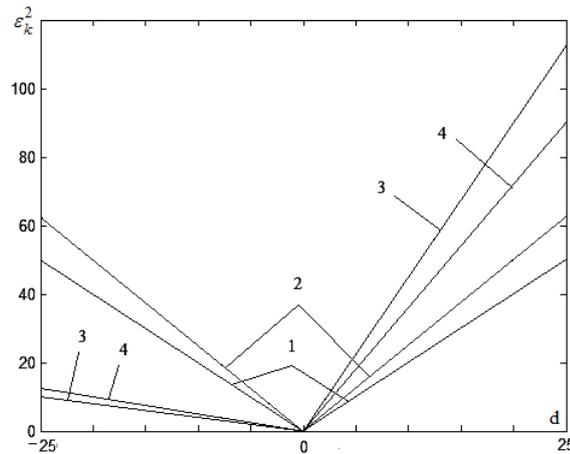


Рисунок П.1

По рис. П.1 замечаем, что при $\beta > 0$ и $d > 0$ помехоустойчивость ФАП выше, чем $\beta > 0$, а $d < 0$.

Можно показать, что условиями захвата за сигнал при действии гармонической помехи является [5] условие

$$|\beta + \varepsilon| \leq 1; \quad |\varepsilon - \beta| \leq 1,$$

или условие

$$-(1 + \varepsilon) < \beta < 1 - \varepsilon; \quad \varepsilon - 1 < \beta < 1 + \varepsilon.$$

С другой стороны, по [9] находим

$$\varepsilon \leq 1 - |\beta|; \quad \varepsilon \geq 1 + |\beta|,$$

или

$$\varepsilon - 1 \leq \beta \leq 1 - \varepsilon; \quad 1 - \varepsilon \leq \beta \leq \varepsilon - 1.$$

Причем во втором случае границы захвата по сигналу совпадают с [4] несмотря на то, что получены [4,5] и [9] на основе разных критериев.

Достаточным условием захвата за помеху является условие [5]

$$\left| \frac{\beta_n}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \right| \leq 1; \quad \left| \frac{\beta_n}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon} \right| \leq 1,$$

или

$$-(1 + \varepsilon) \leq \beta_n \leq \varepsilon - 1; \quad 1 - \varepsilon \leq \beta_n \leq \varepsilon + 1.$$

При этом левая граница в данном случае совпадает с [4].

Заключение

Таким образом, в результате проведенного анализа были получены условия захвата за сигнал и за помеху, зависящие от отношения помеха/сигнал (ОПС), и получены проекции фазовой траектории на плоскости в режиме захвата сигнала и захвата помехи, а также графики зависимостей ОПС от начальной расстройки по частоте. Кроме того, представлены данные сравнения критических значений параметров, полученных двумя различными методами.

Список литературы

1. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации при наличии помех. М.: ИПРЖР, 1996. 252 с.
2. Meyr H., Ascheid G. Synchronization in digital communications frequency – locked loops, and amplitude control. N.Y.: Wiley, 1990. 510 p.
3. Stephens D.R. Phase – locked loops -for Wireless communications. Digital, analog and implementations. 2nd ed. N.Y.: Kluwer, 2002. 421 p.
4. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации методом усреднения. М.: Радио и связь, 1999. 495 с.
5. Nakagawa M. Effects of interfering signals in phase-locked loops // Frequenz. 1978. Vol. 32, no. 5. P. 146-153.
6. Шахтарин Б.И. Квазигармонический метод и его применение к анализу нелинейных фазовых систем. М.: Энергоатомиздат, 1987. 192 с.

7. Быховский М.А. Влияние помехи на процессы захвата в системе фазовой автоподстройки частоты // Радиотехника и электроника. 1987. № 10. С. 2131-2141.
8. Richman D. Color-carrier reference phase synchronization accuracy in NTSC color television // Proc. IRE. 1954. Vol. 42, no. 1. P. 106-133.
9. Karsi M.F., Lindsey W.C. Effects of CW interference on phase-locked performance // IEEE Trans. 2000. Vol. COM-48, no. 5. P. 886-896.

Influence of harmonic noise on the second order phase-lock loop

05, May 2013

DOI: [10.7463/0513.0551477](https://doi.org/10.7463/0513.0551477)

Aslanov T.G.

Bauman Moscow State Technical University, 105005, Moscow, Russian Federation

tabasik@gmail.com

Influence of harmonic noise on phase-lock loop (PLL) leads to distortion of received information and a loss of PLL stability. This article analyzes effects of harmonic interference on synchronization processes in the second order PLL system. Analysis of signal grabbing and interference capturing cases was carried out in this work; projections of a phase path onto planes, which illustrate the specified modes, were also obtained. By analyzing phase planes, equations of capturing signal and interference were obtained. Dependence diagrams of the signal-to-noise ratio and frequency error are presented along with a bifurcation diagram. Application compares critical values of the PLL parameters obtained by different methods.

Publications with keywords: [error performance](#), [harmonic interference](#), [the relation a noise/signal](#)

Publications with words: [error performance](#), [harmonic interference](#), [the relation a noise/signal](#)

References

1. Shakhtarin B.I. *Analiz sistem sinkhronizatsii pri nalichii pomekh* [Analysis of the systems of synchronization at presence of noise]. Moscow, IPRZhR, 1996. 252 p.
2. Meyr H., Ascheid G. *Synchronization in digital communications frequency – locked loops, and amplitude control*. N.Y., Wiley, 1990. 510 p.
3. Stephens D.R. *Phase – locked loops -for Wireless communications. Digital, analog and implementations*. 2nd ed. N.Y., Kluwer, 2002. 421 p.
4. Shakhtarin B.I. *Analiz sistem sinkhronizatsii metodom usredneniia* [Analysis of the systems of synchronization by method of averaging]. Moscow, Radio i sviaz', 1999. 495 p.
5. Nakagawa M. Effects of interfering signals in phase-locked loops. *Frequenz*, 1978, vol. 32, no. 5, pp. 146-153.

6. Shakhtarin B.I. *Kvazigarmonicheskii metod i ego primenenie k analizu nelineinykh fazovykh system* [Quasiharmonic method and its application to the analysis of non-linear phase systems]. Moscow, Energoatomizdat, 1987. 192 p.
7. Bykhovskii M.A. Vliianie pomekhi na protsessy zakhvata v sisteme fazovoi avtopodstroiki chastoty [The influence of noise on the capture processes in the system of phase-locked loop]. *Radiotekhnika i elektronika*, 1987, no. 10, pp. 2131-2141.
8. Richman D. Color-carrier reference phase synchronization accuracy in NTSC color television. *Proc. IRE*, 1954, vol. 42, no. 1, pp. 106-133.
9. Karsi M.F., Lindsey W.C. Effects of CW interference on phase-locked performance. *IEEE Trans. Commun.*, 2000, vol. COM-48, no. 5, pp. 886-896.