электронный научно-технический журнал
ИНЖЕНЕРНЫЙ ВЕСТНИК
издатель ФГБОУ ВПО «Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана»

Метод решения задач на собственные значения механики деформирования оболочек и тонкостенных конструкций

77-48211/597802

 # 08, август 2013

Виноградов Ю. И., Беляев А. В.

УДК 519.7

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
vino.yuri@rambler.ru
beliaev@bmstu.ru

Введение

Известна актуальность решения задач на собственные значения для определения критических нагрузок потери устойчивости и собственных частот колебаний оболочек и тонкостенных конструкций. Предлагается метод решения задач, который отличается научной новизной и превосходящий известные эффективностью: простотой реализации, малыми затратами машинного времени и оперативной памяти. Он позволяет получать результаты с контролируемой погрешностью.

Математические модели класса задач механики деформирования оболочек и тонкостенных конструкций методом Фурье разделения переменных приводят к линейным обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые затем записывают в виде системы уравнений первого порядка и представляют в матричной форме

$$\boldsymbol{y}' = (A - \lambda B)\boldsymbol{y}, \quad (*)' = \frac{d}{dx}(*), \tag{1}$$

где λ - подлежащий определению параметр критической нагрузки или собственной частоты.

Построение метода

Используя метод последовательных приближений Пикара [1,2], решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{y}_x = K_{x_0}^{x}(A - \lambda B)\boldsymbol{y}_{x_0}, \tag{2}$$

где матрица $K_{x_0}^{x}(A - \lambda B)$ функций Коши-Крылова [2] или их значений определяется следующим образом

$$K_{x_0}^{x}(A-\lambda B)=K_{x_0}^{x}(A)K_{x_0}^{x}(H), H=[K_{x_0}^{x}(A)]^{-1}\lambda BK_{x_0}^{x}(A). \tag{3}$$

$$K_{x_0}^{x}(H)=E-\lambda\int_{x_0}^{x}[K_{x_0}^{\tau}(A(\tau))]^{-1}B(\tau)K_{x_0}^{\tau}(A(\tau))d\tau+$$

$$+\lambda^2\int_{x_0}^{x}[K_{x_0}^{\tau}(A(\tau))]^{-1}B(\tau)K_{x_0}^{\tau}(A(\tau))d\tau\int_{x_0}^{\tau}[K_{x_0}^{\tau_1}(A(\tau_1))]^{-1}B(\tau_1)K_{x_0}^{\tau_1}(A(\tau_1))d\tau_1-\ldots . \tag{4}$$

Каждый из скалярных рядов, на которые распадается ряд (4), мажорируют рядом

$$1+g\Delta x+\frac{ng^2}{2!}\Delta x^2+\frac{ng^3}{3!}\Delta x^3+\ldots, \tag{5}$$

где $g\Delta x=\int_{x_0}^{x}gdx, g=\max[|p_{11}(x)|,|p_{12}(x)|,\ldots,|p_{nn}(x)|]$ - наибольший из модулей значений элементов под интегральной матрицы ряда (4).

Ряд (5) по формуле Коши – Адамара сходится на отрезке $[x_0,x]$, причем сходится равномерно в любой замкнутой части этого отрезка. Отсюда вытекает, что и матричный ряд (4) сходится на отрезке $[x_0,x]$ и притом абсолютно и равномерно в любом замкнутом отрезке, входящем в $[x_0,x]$.

Считая Δx малой величиной первого порядка, при вычислении суммы ряда (5) можно ограничиться двумя первыми членами

$$1+g\Delta x+O(\Delta x^2)\approx 1+g\Delta x.$$

Отсюда вытекает, что (4) принимает вид:

$$K_{x_0}^{x}(H)=\lim_{\Delta x\to 0}\{E-\lambda\int_{x_0}^{x}[K_{x_0}^{\tau}(A(\tau))]^{-1}B(\tau)K_{x_0}^{\tau}(A(\tau))d\tau\}. \tag{6}$$

Следовательно, с погрешностью, которая обусловлена выбором величины отрезка $\Delta x=x-x_0$, матрицу $K_{x_0}^{x}(H)$ вычисляют по формуле

$$K_{x_0}^{x}(H)=E-\lambda\int_{x_0}^{x}[K_{x_0}^{\tau}(A(\tau))]^{-1}B(\tau)K_{x_0}^{\tau}(A(\tau))d\tau. \tag{7}$$

Чтобы формула (7) была эффективной для вычислений, поступают следующим образом. Выбранный отрезок Δx промежуточными точками $x_1,x_2,\ldots,x_n$ делят на части, отрезки $[x_{i-1},x_i], i=1,2,\ldots,n,$ а текущему аргументу x присваивается произвольное значение $x=x_n$. Затем используют процедуру аналогичную определению частного решения матричного неоднородного дифференциального уравнения [3], то есть процедуру вычисления так называемой матрицы Коши. В итоге решение (2) дифференциального уравнения (1), эффективное для алгоритмизации вычислительных процедур, принимает вид:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_{x_n}&=\{K_{x_0}^{x_n}(A)-\lambda[K_{x_1}^{x_n}(A)B(\tau_1)K_{x_0}^{x_1}(A)\Delta x_1+K_{x_2}^{x_n}(A)B(\tau_2)K_{x_0}^{x_2}(A)\Delta x_2+\ldots\\&+K_{x_{n-1}}^{x_n}(A)B(\tau_{n-1})K_{x_0}^{x_{n-1}}(A)\Delta x_{n-1}+B(\tau_n)K_{x_0}^{x_n}(A)\Delta x_n]\}\boldsymbol{y}_{x_0},\end{aligned} \tag{8}$$

где $\tau_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, ..., n,$ каждая из матриц $K(A)$ значений функций Коши-Крылова на указанных отрезках, которую вычисляют с контролируемой погрешностью матричным рядом Тейлора [3] или мультипликативным интегралом Вольтерра [1].

Если дифференциальное уравнение (1) имеет постоянные коэффициенты, то его решение (8) упрощается

$$\boldsymbol{y}_{x_n} = \{K^n - \lambda[K^{n-1}B(\tau_1)K + K^{n-2}B(\tau_2)K^2 + ... + KB(\tau_{n-1})K^{n-1} + B(\tau_n)K^n]\Delta x\}\boldsymbol{y}_{x_0}, \tag{9}$$

где верхний индекс у матрицы K обозначает возведение в степень, $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \mathrm{const}$.

При решении прикладных задач выбираемая величина отрезка $\Delta x = x_n - x_0$, как правило, оказывается меньше, например, длины оболочки. Длину оболочки в таком случае набирают определенным числом отрезков Δx. Система матричных уравнений, необходимая для решения задач на собственные значения, формулируется условиями сопряжения определенного числа отрезков Δx.

Действительно, пусть длина, например оболочки, набрана из i отрезков Δx. Решение на каждом из них вычисляют, например, по формуле (8). Допустим, что уравнение (1) имеет каноническую форму записи. При этом столбец $Y_i = |p_i, q_i|$ характеризует состояние $i-$го сечения оболочки, в котором сопрягают отрезки Δx, и состоит из обобщенных перемещений p_i и соответствующих им обобщенных силовых факторов q_i. Тогда решение (8) для произвольного $i-$го отрезка можно переписать в виде двух матричных соотношений, связывающих начало $x_0^{(i)}$ и конец $x_n^{(i)}$ $i-$го участка оболочки. Здесь и далее верхние индексы i будут обозначать номера отрезков, а нижние – номера сечений сопряжения отрезков.

$$p_n^{(i)} = (A_{11}^{(i)} - \lambda H_{11}^{(i)})p_0 + (A_{12}^{(i)} - \lambda H_{12}^{(i)})q_0,$$
$$q_n^{(i)} = (A_{21}^{(i)} - \lambda H_{21}^{(i)})p_0 + (A_{21}^{(i)} - \lambda H_{22}^{(i)})q_{0,}$$

где индексы 0 и n обозначают начало и конец $i-$го отрезка Δx; $A^{(i)} = K_{x_0^i}^{x_n^i}(A)$ и $H^{(i)}$ – матрица в квадратных скобках формулы (8) как множитель при λ разбиты на блоки соответствующие столбцам p и q. Эти матричные соотношения преобразуются к виду

$$q_0^{(i)} = (N_{11}^{(i)} - \lambda M_{11}^{(i)})p_0^{(i)} + (N_{12}^{(i)} - \lambda M_{12}^{(i)})p_n^{(i)},$$
$$q_n^{(i)} = (N_{21}^{(i)} - \lambda M_{21}^{(i)})p_0^{(i)} + (N_{22}^{(i)} - \lambda M_{22}^{(i)})p_n^{(i)}, \tag{10}$$

$$N_{11}^{(i)} = -[A_{12}^{(i)}]^{-1}A_{11}^{(i)}, N_{12}^{(i)} = [A_{12}^{(i)}]^{-1}, N_{21}^{(i)} = A_{21}^{(i)} - A_{22}^{(i)}[A_{12}^{(i)}]^{-1}A_{11}^{(i)},$$
$$N_{22}^{(i)} = A_{22}^{(i)}[A_{12}^{(i)}]^{-1}, M^{(i)} = [D_1^{(i)}](H_2^{(i)} - H_1^{(i)}[D_1^{(i)}]^{-1}D_2^{(i))},$$
$$D_1^{(i)} = \begin{Vmatrix} -A_{12}^{(i)} & 0 \\ -A_{22}^{(i)} & E \end{Vmatrix}, D_2^{(i)} = \begin{Vmatrix} -A_{11}^{(i)} & -E \\ -A_{21}^{(i)} & 0 \end{Vmatrix}, H_1^{(i)} = \begin{Vmatrix} -H_{12}^{(i)} & 0 \\ -H_{22}^{(i)} & 0 \end{Vmatrix}, H_2^{(i)} = \begin{Vmatrix} -H_{11}^{(i)} & 0 \\ -H_{21}^{(i)} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Кинематические и силовые условия сопряжения, например $i-$го и $i+1$ отрезков Δx имеют вид $p_n^{(i)} = p_0^{(i+1)} = p_{i+2}$ и $q_n^{(i)} - q_0^{(i+1)} = q_{шп,i+1} + q_{у.э.,i+1}$ соответственно. Здесь

$q_{шп,i+1} = C_{шп,i+1} p_{i+1}, q_{у.э.,i+1} = C_{у.э.,i+1} p_{i+1}, C_{шп,i+1}$ и $C_{у.э.,i+1}$ – жесткости шпангоута и упругого элемента, сопряженного, например, с оболочкой в $i+1$ сечении.

Используя условия сопряжения отрезков и матричные соотношения (10) получают систему матричных уравнений для вычисления параметра λ собственного значения задачи

$$(N - \lambda M) p = 0. \qquad (11)$$

Матрицы N и M имеют «ленточную, тридиагональную, матричную» структуру, где

$$N_{11} = -N_{11}^{(1)} + C_{шп,1} + C_{у.э.,1}; N_{12} = -N_{12}^{(1)}; N_{21} = N_{21}^{(1)};$$
$$N_{22} = -N_{11}^{(2)} + N_{22}^{(1)} + C_{шп,2} + C_{у.э.,2}; N_{23} = -N_{12}^{(2)}; N_{32} = N_{21}^{(2)};$$
$$N_{33} = -N_{11}^{(3)} + N_{22}^{(2)} + C_{шп,3} + C_{у.э.,3}; N_{34} = -N_{12}^{(3)};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$N_{k,k} = -N_{11}^{(k)} + N_{22}^{(k-1)} + C_{шп,k} + C_{у.э.,k}; N_{k,k+1} = -N_{12}^{(k)}; N_{k,k-1} = N_{21}^{(k-1)};$$
$$N_{k+1,k} = N_{21}^{(k)}; N_{k+1,k+1} = N_{22}^{(k)} + C_{шп,k+1} + C_{у.э.,k+1}.$$

Известна симметричность и очевидна разреженность матриц N в (11). Следовательно, в оперативной памяти ЭВМ сохраняют значащие элементы, расположенные на и выше главной диагонали, что экономит оперативную память и сокращает время счета. Матрица M в (11) повторяет структуру матрицы N. Отличие только в том, что она не содержит матрицы $C_{шп}$ и $C_{у.э.}$.

Вычислительный алгоритм

Таким образом, построенный метод отличается от известных существенными признаками: новизной и эффективным вычислительным алгоритмом решения краевых задач на собственные значения. Вычислительный алгоритм прост:

● по формулам (8), (9) вычисляют решение дифференциального уравнения (1) на отрезках $\Delta x = x_n - x_0$ с контролируемой погрешностью;

● в соотношениях (10) вычисляют блоки матриц N и M для отрезков Δx и формируется система матричных уравнений (11). При этом учитывают заданные краевые условия и подкрепление, например оболочки, шпангоутами и/или упругими элементами;

● вычисляют определитель матричного уравнения (11). При нуле определителя достигается цель определения величины параметра λ.

Новизна метода состоит в том, что решение дифференциального уравнения (1) определяют с заданной погрешностью. Таким образом, вероятно впервые, построен аналитический метод решения задач на собственные значения. Вычислительная эффективность решения задач обусловлена простотой алгоритма.

Данным методом была решена задача определения собственных частот и форм колебаний шахты ядерного реактора энергетической установки на Калининской атомной станции. Метод использовался также для определения собственных частот и форм колебаний тонкостенных конструкций ракет. Проводился анализ устойчивости головного обтекателя ракеты в форме конической оболочки, изнутри подкрепленной шпангоутами. Значения критических нагрузок определялись при сжатии обтекателя в осевом направлении от действия внешнего давления, переменного по длине.

Пример решения задачи

Расчетная схема шахты реактора представляет собой цилиндрическую, консольно закрепленную оболочку. На ее свободном краю жестко крепится твердое тело, которое большей частью размещается с зазором в оболочке так, что его центр масс находится на оси внутри оболочки. У свободного края оболочка дискретно подкреплена с наружной стороны упругими элементами.

Расчетная схема имела следующие параметры. Цилиндрическая оболочка: длина 6,383 м, толщина 0,0061 м, диаметр по наружной поверхности 3,556 м; модуль упругости, плотность и коэффициент Пуассона материала: $E = 2 \cdot 10^{11} H / м^2$, $\rho = 7800 кг / м^3$, $\nu = 0,3$.

Расстояние от свободного края оболочки до центра тяжести твердого тела составляет 1,417 м. Упругие элементы находятся на расстоянии 0,273 м от свободного края оболочки. Характеристики упругих элементов $k_w = 3,54 \cdot 10^{10} H / ì$, k_v=5,4$\cdot 10^9 H/ì$. Направление осей координат x, y, z выбрано соответственно - вдоль оси оболочки, по касательной к ее окружности и по внешней нормали. Перемещения точек срединной поверхности оболочки w,v,u – в направлении соответствующих осей.

Характеристики твердого тела, масса и моменты инерции, заданы величинами:

$M = 0,1469 \cdot 10^6 кг$, $J_x = J_y = 0,4223 \cdot 10^6 кгм^2$, J_z=0,1386$\cdot 10^6 кгм^2$.

Предложенным методом были определены собственные частоты и формы колебаний оболочки при дискретном расположении упругих элементов и при равномерном распределении («размазывании») по окружности жесткостных характеристик упругих элементов. Сравнение результатов показало, что для второй частоты отличие составило 20%. Для остальных частот оно не превышало 10%. Формы колебаний по длине оболочки для прогиба w при $\varphi = 0$ (начало отсчета окружной координаты) отличались незначительно. Следовательно, для определения низших частот колебаний оболочки можно использовать «размазывание» жесткости упругих элементов, что упрощает решение задачи.

Из анализа результатов следовало, что формы колебаний оболочечной конструкции по окружной координате в сечении установки упругих элементов существенно отличаются от формы колебаний с «размазанными» жесткостями упругих элементов. При симметричных и кососимметричных колебаниях формы по длине оболочки отличаются знаками, а по окружности смещены относительно друг друга. При удалении от упругих элементов форма колебаний оболочки по окружной координате принимает конфигурацию, соответствующую первой гармонике разложения Фурье.

Результаты, полученные при номинальной, удвоенной и вдвое меньшей жесткости упругих элементов, показали, что данные изменения оказывали влияние только на «балочные» частоты и частоты крутильных колебаний.

Количество гармоник, удерживаемых в разложениях Фурье, определялось из анализа степени его влияния на форму колебаний в сечении установки упругих элементов. Результаты при шести удерживаемых гармониках условно принимались за 100%. Получено, что для определения форм колебаний было достаточно ограничиться тремя гармониками.

Выводы

Предложено аналитическое решение дифференциального уравнения, содержащего параметр в задачах на собственные значения. Построен эффективный алгоритм решения краевых задач на собственные значения для класса задач с использованием метода Фурье разделения переменных в дифференциальных уравнениях с частными производными. Алгоритм обеспечивает устойчивость счета на ЭВМ и позволяет контролировать погрешности в результатах решения задач.

Список литературы

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. -548 с.
2. Peano G. Integration par series des equations differentielles lineaires//Math. Ann. – 1888. – Bd. 32. – S. 450 – 456.
3. Виноградов Ю.И. Метод решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений//ДАН. 2006. Т. 409. № 1. С. 15-18.