#### НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

## НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

### О тензорной нелинейности пластических материалов

# 04, апрель 2013

DOI: 10.7463/0413.0567103

**Комков К. Ф.** УДК 539.3; 539.374

> Россия, Балашиха, Военно-технический университет 06kfk38@mail.ru

#### Введение

Начало исследованиям зависимости деформационных свойств пластических материалов от вида напряженного состояния, по-видимому, следует связывать с работой В. Лоде [1], изданной в 1926 году, в которой впервые приводится диаграмма, названная его именем. Эта диаграмма призвана выявить закономерность изменения вида деформированного состояния от напряженного состояния. Малая разница параметров, характеризующих эти состояния, и противоречивые экспериментальные результаты в работах [1-5] и других исследователей послужили основанием к утверждению ее незначительности и признанию несущественной для разработки моделей отмеченных сред, допуская подобие девиаторов напряжений и деформаций.

Заметным исследованием по разъяснению этого непростого вопроса явилась работа Митрохина Н.М., Ягна Ю.И. [2], в которой целенаправленными испытаниями дан однозначный ответ, что зависимость диаграмм  ${}^{S_0} \sim e_0$  от вида напряженного состояния наблюдается даже для очень пластичного чистого никеля. Здесь  ${}^{S_0}, e_0$  - представляют собой интенсивности напряжений и деформаций. Однако при обсуждении формы диаграммы Лоде они склонились к сложившемуся представлению, не согласующемуся с результатами более ранних исследований и современных теоретических выводов.

Данная работа, в продолжение статьи [6], посвящена устранению выявленных противоречий и доказательству практической необходимости учета отмеченной зависимости, которая является одним из основных признаков тензорной нелинейности твердых деформируемых тел. С этой целью полезно привести некоторые выводы, изложенные в работе [7].

# 1 Анализ экспериментальных сведений об отклонениях от подобия девиаторов напряжений и деформаций

Тензорной нелинейностью будим считать эффект анизотропии, характеризующийся различием значений податливостей  $\phi_i = \gamma_i/\tau_i$  или модулей  $G_i = \tau_i/\gamma_i = 1/\phi_i$  в

направлениях  $\tau_i = (\sigma_j - \sigma_\alpha)/2$  - главных касательных напряжений или  $\gamma_i = e_j - e_\alpha$  - главных деформаций сдвига, где  $i,j,\alpha=1,2,3;\ i\neq j\neq \alpha$ , который проявляется в процессе пропорционального нагружения. Этот факт представляется неравенством следующих отношений  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\sigma_1 - \sigma_2) \neq (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)/(\sigma_2 - \sigma_3) \neq (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)/(\sigma_2 - \sigma_1)$ , означающим отклонение от подобия соосных девиаторов деформаций и напряжений.

Отмеченное различие характеристик не является «разномодульностью» в утвердившемся понимании, поскольку модули  $G_i$  или податливости  $\phi_i$  относятся к одному и тому же напряженному состоянию. В данном случае различие  $\phi_i$  или  $G_i$  в разных направлениях указывает на наличие анизотропии среды, которая до появления пластической деформации была изотропной. При равенстве  $\phi_i$  или  $G_i$  тензорнонелинейные уравнения

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij} + (\Phi_m/2) S_{ij} + \Phi_d (S_{i\alpha} S_{\alpha j} - 2/9 S_0^2 \delta_{ij}) / S_0$$
 (1)

вырождаются в линейные. В нелинейных уравнениях функции

$$\Phi_m = \phi_i / 3 = \Phi_\theta \sin(2\theta + \vartheta) / \sin 3\theta, \tag{2}$$

$$\Phi_d = \{ [(\phi_j - \phi_\alpha)^2]/8 \}^{1/2} = 3\Phi_\theta \sin(\theta - \theta)/(2\sin 3\theta)$$
 (3)

имеют смысл средней и среднеквадратической податливости формоизменения, которые связаны с исходными податливостями соотношением

$$\phi_i = \Phi_m - 2\Phi_d c_i / 3,\tag{4}$$

вытекающим из уравнений (1), если их представить для главных деформаций сдвига  $\gamma_i = \tau_i (\Phi_m - 2/3\Phi_d c_i)$ 

Пользуясь определением для интенсивности деформаций  $e_0 = (2/3e_{ij}e_{ij})^{1/2}$  уравнениями (1), находим выражение для податливости

$$\Phi_{\theta} = \left[ \Phi_m^2 + (4/3)\Phi_m \Phi_d \cos 3\theta + (4/9)\Phi_d^2 \right]^{1/2},\tag{5}$$

которая связана с характеристикой  $G_{\vartheta} = S_0/3e_0 = 1/\Phi_{\theta}$ , названной В.В. Новожиловым [8] обобщенным модулем сдвига. Интенсивность напряжений  $S_0 = (3/2S_{ij}S_{ij})^{1/2}$  определяется по компонентам девиатора напряжений  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ ;  $\sigma_{ij}$  тензор напряжений, а  $\sigma_0$  среднее напряжение;  $\varepsilon_{ij}$ ,  $e_{ij}$  тензор и девиатор деформаций, а  $\varepsilon_0$  средняя деформация,  $\theta$  и  $\vartheta$  углы вида напряженного и деформированного состояний, соответственно.

Для удобства преобразований использовались выше величины:  $c_1=2\cos\theta,\ c_2=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta,\ c_3=-\left(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)$ . Подобные же величины  $d_i$  представляют собой такие же функции угла  $\vartheta$ . Из вторых равенств соотношений (2) и (3) вытекает выражение для тангенса фазы подобия девиаторов напряжений и деформаций

$$tg\omega = \left[2\Phi_d \sin 3\theta / (3\Phi_m + 2\Phi_d \cos 3\theta)\right] = \Delta A / A_\omega \ge 0 \tag{6}$$

Эта формула показывает, что угол  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\vartheta}$  может быть определен только при наличии функций  $\boldsymbol{\Phi}_m$  и  $\boldsymbol{\Phi}_d$ . Из выражения (6) следует, что величина  $\boldsymbol{\omega}$  больше нуля при всех  $\boldsymbol{\theta}$ , кроме углов  $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{0}$  и  $\boldsymbol{\theta} = \pi/3$ , где она принимает нулевое значение.

Из определений параметров Лоде  $\lambda_{\sigma}=-2\tau_1/\tau_2-1_{_{\rm II}}\lambda_{\varepsilon}=-2\gamma_1/\gamma_2-1_{_{\rm TAK}}$  же нетрудно найти, что их разница приводится к выражению

$$\Delta \lambda = \lambda_{\sigma} - \lambda_{\varepsilon} = (\lambda_{\sigma} + 1)(\Phi_2 - \Phi_1)/\Phi_2 = \Delta A/A_{\tau} \ge 0, \tag{7}$$

где  $\Delta A = (\tau_2 \gamma_1 - \tau_1 \gamma_2)$ ,  $A_{\omega}$  и  $A_{\tau} = (\tau_2 \gamma_2/2)$  придают величинам  $\omega$  и  $\Delta \lambda$  физический смысл. Их зависимость от угла  $\theta$  имеет форму полуволны синусоиды, отличающихся только максимальными значениями. Отношение  $\Delta \lambda/tg\omega$  близко к числу 2 при всех значениях угла  $\theta$ . Соотношением (7) наглядно представлена тензорная нелинейная сущность этого эффекта - при равенстве  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  девиаторы подобны.

На рис. 1 а) представлены: кривыми 1, 2 и 3 податливости  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$ ; прямая 4, соотетствующаяя равенству  $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\sigma}$ ; кривая 5 - диаграмма Лоде, обобщающая экспериментальные результаты В. Лоде [1], Е. Дэвиса [3] и А. М. Жукова [4] и кривая 6 - диаграмма Лоде. Последняя построена по данным о деформациях  $\varepsilon_i$ , вычисленных с помощью уравнения (1), а так же повторным расчетом по соотношению (7).

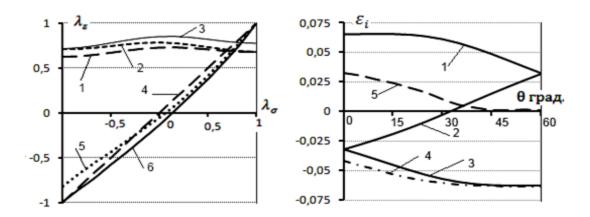


Рис. 1. а) Зависимость податливостей  $\Phi_i$  (кривые  $1\div 3$ ) и  $\lambda_{\varepsilon}$  от  $\lambda_{\sigma}$  при  $e_0=6,5\%$ . прямая  $4-\lambda_{\varepsilon}=\lambda_{\sigma}$ , кривая 5- по результатам испытаний, кривая 6- теория; б) зависимость деформаций от угла  $\theta: \varepsilon_i$  - кривые  $1\div 3$ , радиальной  $\varepsilon_3$  - кривая 4 и дополнительной  $\varepsilon_g$  - кривая 5.

Исходными данными для расчетов податливостей  ${}^{\Phi_i}$ , характеристик формоизменения  ${}^{\Phi_m}$ ,  ${}^{\Phi_d}$ , а так же деформаций явились диаграммы  ${}^{S_0} \sim e_0$  работы [2] по испытаниям никеля, представленные ниже на рис. 3 а), используя методику восстановления характеристик формоизменения, подробно описанную в работе [7]. Поведение диагрямы Лоде 6 отражает формула (7), которая объясняет причину неподобия девиаторов эффектом тензорной нелинейности - разницей податливостей  ${}^{\Phi_1}$ ,  ${}^{\Phi_2}$ . Вначале диагрямы 5 и 6 близко лежат друг от друга при положительных значениях  ${}^{\Delta\lambda}$  (ниже прямой, представляющей равенство  ${}^{\lambda_{\varepsilon}} = {}^{\lambda_{\sigma}}$ ), хотя первый множитель  $({}^{\lambda_{\sigma}} + 1)$  справа от  ${}^{\lambda_{\sigma}} = 0$  принимает значения от 1 до 2.

Расстояние между кривыми 1 и 2 для податливостей  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  возрастает, но диагрммы постепенно расходятся. Слева от  $\lambda_{\sigma} = 0$  этот множитель, изменяясь от 1 до 0, приближает диаграмму 6 к прямой  $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\sigma}$ , а диагрмма 5 уходит выше при отрицательных  $\Delta \lambda$ . Следовательно, поведение диагрммы 5 не соответствует формуле (7). Из данного сравнения можно утверждать, что значения для диагрммы 5 определены с ошибкой.

На рис. 1 б) осевая, окружная и радиальная деформации  $\varepsilon_i$  даны кривыми 1, 2 и 3, полученные расчетом, предполагающим линейное изменение объемной деформации. Кривая 4 представляет радиальную деформацию, найденную из соотношения  $\varepsilon_3 = (2\varepsilon_2 - \varepsilon_1(\Lambda_\varepsilon + 1))/(1 - \Lambda_\varepsilon)$ , где значения параметра  $\Lambda_\varepsilon$  определяются по диаграмме 5. Чтобы выяснить причину отклонения диагрямы 5, найдена дополнительная деформация, которая определяется соотношением

 $\varepsilon_g = [(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)]/3 = (\varepsilon_3 - \varepsilon_3)/3$ . Она приведена на рис. 1 б) кривой 5 (с множителем 10). Различие деформаций  $\varepsilon_3$  и  $\varepsilon_3$  будем относить к

неточностям, связанными с допущением о «несжимаемости»,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$ , принимаемого при обработке экспериментальных результатов.

По определению параметра  $^{\lambda_{\mathcal{E}}}$  объемная деформация не влияет на формоизменение, но поскольку «измеряемые» осевая и окружная могут содержать не только линейную, но и дополнительную деформацию, то радиальная то же, поскольку определяется из условия  $\epsilon_3 = -(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ . Этот факт можно считать одной из причин неточностей при обработке экспериментальных результатов. Для его доказательства проведен следующий вычислительный «эксперимент», результаты которого представлены в виде графиков на рис. 2.

«Измеряемые» деформации по сравнению с ранее используемыми деформациями для построения диаграммы Лоде 6, дополнены деформацией  $\varepsilon_g$ , то есть  $\varepsilon_i' = \varepsilon_i + \varepsilon_g$ , i=1,2. Расчет разницы  $\Delta\lambda$  проводился при разных значениях радиальной деформации, изменяющейся с изменением коэффициента  $\alpha=0\div 1$ , определяляемой из условия:  $\varepsilon_3'=3(\varepsilon_0+\alpha\varepsilon_g)-(\varepsilon_3'+\varepsilon_3')$ . На рис. 2 зависимость  $\Delta\lambda\sim\theta$  представляют четыре кривых. Кривая 1 относится к разнице  $\Delta\lambda=\lambda_\alpha-\lambda_\varepsilon$ . Значения параметра  $\lambda_\varepsilon$  соответствуют диаграмме Лоде 6 на рис.1. Кривая 3 найдена при  $\alpha=0$ . При этом оказалось, что ее значения достаточно близки к разнице  $\Delta\lambda=\lambda_\sigma-\Lambda_\varepsilon$ , относящейся к диаграмме 5 рис. 1 а).

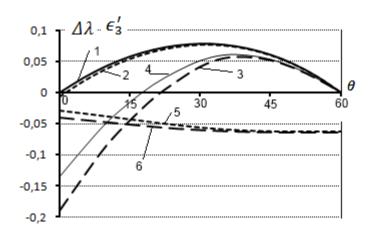


Рис. 2. Зависимость разницы параметров  $\Delta\lambda$  - кривые 1÷4 и радиальных деформаций  $\epsilon_3'$ : кривая 6 при  $\alpha=0$  и кривая 5 при  $\alpha=1$  от угла  $\theta$ .

С возрастаним коэффициента  $\alpha$  кривая 3 поднимается и при значении равного 0,33 заняла положние кривой 4, а при значении 0,95 кривой 2, лежащей ниже кривой 1. При  $\alpha=1$  кривая для  $\Delta\lambda$  накладывается на кривую 1. По значениям радиальных деформаций  $\epsilon_3'$  построены кривая 6 при  $\alpha=0$  и кривая 5 при  $\alpha=1$  в зависимости от угла  $\theta$ . Результаты вычислительного «эксперимента» показывают, что новые значения всех трех деформаций при  $\alpha=1$  приводят значения податливостей  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,

удовлетвояющие соотношению (7). «Эксперимент» дает основание считать дополнительную деформацию  ${}^{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{g}$  деформацией «разрыхления». Таким образом, при обработке результатов испытаний необходимо учитывать  ${}^{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{g}$  и определять ее по графоаналитической методике восстановления диаграмм Лоде, изложенной выше, которая представлена здесь в развитие методики, данной в работе [6].

Следует особо остановиться на значении разницы  $\Delta\lambda$  при  $\lambda_{\sigma} = 0$ . В. Лоде [1] принимал равенство  $\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\sigma}$ , то есть подобие девиаторов при  $\theta = \pi/6$ , но с оговоркой, что некоторые исследователи наблюдали осевые деформации при кручении, не упоминая опыты Дж. Пойнтинга. Авторы работы [2] принимают это равенство по результатам своих исследований, ссылаясь так же на результаты других работ, [3] и [5]. Однако, по поведению кривых 1 и 2 рис. 2, а так же, исходя из анализа соотношений (6) и (7), следует, что величины  $\Delta\lambda$  и  $tg\omega$ , имеют при  $\theta = \pi/6$  значения близкие к максимальным, а следовательно, и максимальное отклонение от подобия девиаторов.

В пользу последнего вывода могут служить результаты опытов Г. Вертгейма и Дж. Пойнтинга и других исследователей [11], выявивших осевую, поперечную и объемные деформации при кручении проволоки из разных металлов. Результаты этих опытов согласуются с представлениями о тензорной нелинейности, изложенной выше. Представляется, что основной причиной экспериментального результата  $\Delta \lambda = 0$  при  $\theta = \pi/6$ , принятого в работах [1], [2], [3] и [4], являются условия проведения испытаний цилиндрических образцов с резьбовыми соединениями, приводящих к ограничению осевой деформации.

В.В. Новожилов, используя теорию течения и гипотезы об упрочнении, обусловленными внутренним трением и внутренними упругими силами, показал, что всякая пластическая деформация сопровождается увеличением объема. Этот эффект на микро и макроуровнях исследуется физиками, которые относят его к «пластическому разрыхлению». Таким образом, проведенный выше анализ диаграмм характеризующих отклонение от подобия девиаторов напряжений и деформаций, не только показал основную причину ошибок при их вычислении, но и позволил подтвердить с их помощью присутствие эффекта «разрыхления» в процессе пластической деформации. Причем здесь показано, что деформация «разрыхления» существенно зависит от вида напряженного состояния.

# 2 Зависимость положения кривых упрочнения в координатах $S_0, e_0$ от вида напряженного состояния

В отечественной и зарубежной литературе можно найти немало сведений о том, что диаграммы  ${}^{S_0} \sim e_0$  (кривые упрочнения) пластических материалов, полученные при простом нагружении, но для разных напряженных состояний, не совпадают. Среди них следует выделить, упомянутую выше работу [2], в которой найдена закономерность положения кривых упрочнения в зависимости от вида напряженного состояния. На рис. 3 а) показан пучок диаграмм пластичного чистого никеля, соответствующих разным значениям параметра Лоде.

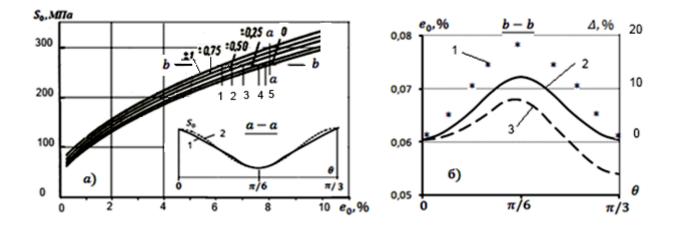


Рис. 3. Зависимость деформации никеля: а) от параметра  $\lambda_{\sigma}$ : кривая 1 относится к состояниям  $\lambda_{\sigma} = \pm 1$ , кривая  $2 - \lambda_{\sigma} = \pm 0,75$ , кривая  $3 - \lambda_{\sigma} = \pm 0,5$ , кривая  $4 - \lambda_{\sigma} = \pm 0,25$ , кривая 5 к состоянию  $\lambda_{\sigma} = 0$ ; сечение a - a - зависимость напряжения  $s_{\sigma} = 0$  от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$  от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; кривая  $s_{\sigma} = 0$  от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; кривая  $s_{\sigma} = 0$  от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$  от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; кривая  $s_{\sigma} = 0$  от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; кривая  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; кривая  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; кривая  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; кривая  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; от угла  $s_{\sigma} = 0$ ; сечение  $s_{\sigma} = 0$ ; сечени

Пять кривых иллюстрируют тот факт, что диаграммы испытаний никеля  ${}^{S_0}\sim e_0$ , лежат в узком пучке кривых не хаотично. На рисунке представлена зависимость кривых упрочнения никеля от интенсивности деформации  ${}^{e_0}$  и от параметра  ${}^{\lambda}\sigma$ , где обозначены его значения. В этой работе принято допущение, что процесс формоизменения протекает одинаково независимо от знака  ${}^{\lambda}\sigma$ . По этому допущению ниже всех лежит диаграмма для сдвига  $(\theta=\pi/6)$ . Сечение диаграмм  ${}^{a}-{}^{a}$  при постоянной деформации  ${}^{e_0}=8\%$  представляет собой  ${}^{V}-$  образную кривую, которая приводится под диаграммами. Напряжение, относящееся к сдвигу, на 12 % меньше напряжения при растяжении. Кривая 1 построена по значениям опытных данных, а кривая 2 является ее аппроксимацией тригонометрическим выражением

$$S_0(\theta) = a_1 + a_2 \cos 3\theta + a_3 (\cos 3\theta)^2. \tag{8}$$

На рис. 3 б) показано сечение диаграмм  $\mathbf{b} - \mathbf{b}$  при постоянном напряжении  $S_0 = \mathbf{275}$  МПа. Кривая 1, построенная звездочками по опытным данным (с учетом допущения), принятого в работе [2]. Она представляет зависимость деформации  $e_0$  от угла  $\theta$ . Отклонения деформаций  $\mathbf{a} = (e_0 - e_{0p})/e_{0p}$ , относящиеся к деформации растяжения  $e_{0p}$ , исчисляются в десятках %. Результаты расчета получены по соотношению, аналогичному (8) и относятся только к отклонениям  $\mathbf{a}$  в процентах. Кривые 2 и 3 построены по результатам расчетов с помощью уравнения (1) после введения некоторых изменений опытных данных, о которых речь пойдет ниже.

Отклонения по напряжениям и деформациям по своим значениям существенно отличаются и зависят от формы диаграмм.

Рассматриваемые отклонения для стали ЭИ415 за пределом текучести удается выявить только после тщательного анализа. С этой целью использовались результаты работы А. М. Жукова [4], где дано описание испытаний трубчатых образцов при нагружении их внутренним давлением и осевой силой. На рис. 4 а) показаны диаграммы  $S_0 \sim e_0$ , полученные для разных напряженных состояний, которые различаются отношением k - осевого напряжения к окружному напряжению. Аналогичные диаграммы для  $7 \div 11$  образцов здесь не приводятся, хотя при обработке данных они используются.

Комментируя диаграммы, автор [4] отмечает - «Из приведенных кривых можно усмотреть, что они подобны и что максимальное отклонение по ординатам не превышает  $\pm 4\%$ . Если учесть некоторую неоднородность материала и неизбежность небольших погрешностей в опыте, то с достаточным основанием можно принять, что кривые  $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$  не зависят от вида напряженного состояния». ( $\sigma_i, \varepsilon_i$  — в этой работе являются интенсивностями напряжений и деформаций, соответственно). То есть какая — либо закономерность положения диаграмм не предполагалась, но она достаточно отчетливо проявляется, если посмотреть на их сечения с введением дополнительной координаты. На рис. 4 б) дано сечение диаграмм a-a при постоянной деформации  $e_0=0,016$ , развернув значения напряжений по оси  $\theta$ . Почти все опытные точки достаточно близко расположены около расчетной кривой, подчеркивая предложенную закономерность соотношением (8).

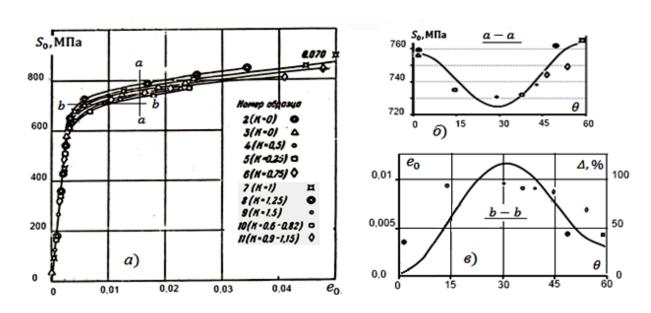


Рис. 4. Результаты испытаний стали ЭИ415: а) диаграммы  ${}^{S_0} \sim e_0$  при изменяющемся отношении k: б) сечение  ${}^{a} - a$  - зависимость напряжения  ${}^{S_0}$  от угла  ${}^{\theta}$ , точки – по опытным данным, кривая - по расчетным данным; в) сечение  ${}^{b} - {}^{b}$  - зависимость деформации  ${}^{e_0}$  от угла  ${}^{\theta}$ , точки – по опытным данным, кривая - по расчетным данным для отклонений  ${}^{\Delta}$ .

На рис. 4 в) показано сечение диаграмм  $\mathbf{b} - \mathbf{b}$  при постоянном напряжении  $\mathbf{S_0} = \mathbf{700} \, \mathbf{MHa}$ . Положения опытных точек (значений деформаций) невозможно уложить на одну кривую и это вполне объяснимо, поскольку каждой точке соответствует только один испытанный образец. В таблице 1 приведены основные сведения, которые позволили представить отклонения по напряжениям, рис. 4 б), и по деформациям, рис. 4 в), и которые убедительно показывают на зависимость положения диаграмм от вида напряженного состояния.

Таблица 1

№ об.	2 и 3	5	4	10	9	6	8	11	7
$k = \sigma_z/\sigma_\theta$	0	0,25	0,5	0,6	1,5	0,75	1,25	0,9	1,0
θ	0	13,9	30	36,6	40,9	46,1	49,1	54,8	60
<b>S</b> <sub>0</sub> , МПа		733,3	731,1	731,3	737,8	744,6	762,2	746,7	765
a - a	758,7								
$e_0 10^2$	0,43	0,9	0,83	0,8	0,78	0,73	0,47	0,68	0,46
b - b									

Отклонения деформаций  $\Delta = (e_0 - e_{0p})/e_{0p}$ , исчисляются уже в нескольких десятках %. Она представляет зависимость деформации  $e_0$  от угла  $\theta$ . Результаты расчета получены, так же как и для никеля, по соотношению (8) и относятся только к отклонениям  $\Delta$ . Подобные отклонения можно выявить и в работе Девиса [3], проводившего испытания образцов меди. Как отмечено в работе [2], положения точек диаграмм в октаэдрических координатах, относящихся к растяжению  $\theta = 0$  и сдвигу  $\theta = \pi/6$ , при постоянной деформации составляет  $\sim 9$ %. Аналогичные результаты исследований получены для пластичных сталей и алюминиевых сплавов. Отклонения по деформациям  $\Delta$  с перемещением сечений  $\Delta$ 0 от начала координат вдоль кривой упрочнения снижаются, поскольку значения деформаций для растяжения и сдвига выравниваются.

Рассматриваемые отклонения по напряжениям и деформациям констатируют тот факт, что математические модели, принимающие за основу «единую кривую», например, диаграмму по испытанию на растяжение, будут приводить к ошибкам, которые соответствуют найденным отклонениям. При использовании «единой кривой» о точности определения деформаций просто умалчивается, считая, что она совпадает с точностью определения напряжений. Чтобы избавиться от этих ошибок, необходимо для каждого напряженного состоянию использовать свою зависимость между напряжениями и деформациями.

### 3 Уточнение положения кривых упрочнения

Отмеченные экспериментальные исследования сопряжены с применением сложного оборудования и необходимостью определения деформаций с высокой точностью. Если учесть некоторую неоднородность материала наличие начальной анизотропии и

неизбежность погрешностей при испытаниях, то разброс результатов при их обработке вполне объясним. Для их снижения можно воспользоваться подходом, который просматривается при анализе работы [1].

Чтобы выявить своими экспериментальными исследованиями влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов, В. Лоде величину  $\hat{\mathbf{s}} = (S_1 - S_3)/\sigma_z$  сравнивал для двух гипотез пластичности. Если справедлива 3-я гипотеза пластичности, то она должна быть постоянной и независимой от деформации, где  $\sigma_z$  текущий предел текучести при простом растяжении. По 4-ой или энергетическому критерию, который приводится к выражению

$$A = S_0^2 / 6\mu = (S_1 - S_3)^2 (3 + \lambda_\sigma^2) / 24\mu = (\tau_i^2) / 3\mu$$
(9)

где  $\mu$  — модуль сдвига, относительная величина \$ представляется уже в виде

$$\hat{\mathbf{s}} = 2/\sqrt{3 + \lambda_{\sigma}^2} \tag{10}$$

Этот подход позволил В. Лоде свои экспериментальные результаты приводить к величине  $^{\$}$ , названной в [9] относительным пределом текучести. Для доказательства своего предположения Лоде провел исследования на трубчатых образцах из никеля, меди и двух сортов стали. Нагрузка на образец прикладывалась ступенчато. За каждой ступенью простого растяжения после разгрузки следовала ступень роста напряжений от продольной силы и внутреннего давления, которые создавали напряженное состояние  $-1 \le \lambda_{\sigma} \le +1$ , изменяющееся в пределах всех возможных значений этого параметра. Результаты испытаний, сравнивались с ожидаемой постоянной величиной  $^{\$}$  - прямой 3, и кривой 1, названной «эталонной», значения для которой найдены по соотношению (10).

Проведенные исследования позволили автору [1] представить результаты в координатах  $\hat{s} \sim \lambda_{\sigma}$  и найти, что опытные точки, представленные на рис. 5, лежат между эталонной кривой, которая отображает собой часть эллипса Мизеса, и прямой  $\hat{s} = 1$ , отвечающей 3 - ей гипотезе. Эти результаты показали, что энергетический критерий можно считать более приемлемым.

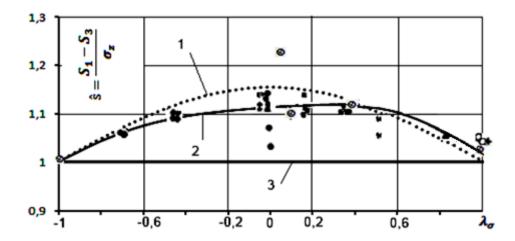


Рис. 5. Зависимость относительного предела текучести  $^{\$}$  от параметра  $^{\lambda_{\sigma}}$ : а) кривая 1 — расчет по (10), кривая 2 — расчет по (13), прямая 3 — прямая  $^{\$} = \mathbf{1}$ , отвечающая 3-й гипотезе, точки - результаты испытаний В. Лоде.

Для точного описания результатов испытаний в данной работе предлагается учесть тот факт, что фиксация состояния пластичности производилась тогда, когда примерно вся рабочая часть образца находилась в состоянии текучести. Поскольку большая часть опытных точек лежит ниже кривой 1 имеет смысл провести уточнение критерия (9), применяя его в обобщенной формулировке

$$A = \tau_i \, \gamma_i / 3 \tag{11}$$

в которой деформации описываются уже нелинейными уравнениями (1) и для сдвига имеют выражения  $\gamma_i = \tau_i (\varPhi_m - 2/3 \varPhi_d c_i)$ .

Выполняя преобразования, что и для классического критерия, учитывая,  ${}_{\text{что}}[c_i(c_j-c_\alpha)^2] = -18cos3\theta, \text{ находим}$ 

$$A = \{ [\Phi_m (S_1 - S_3)^2 (3 + \lambda_\sigma^2)/2] - 4/3 \Phi_d S_0^2 \cos 3\theta \}/12$$
 (12)

и выражение для относительного предела текучести в виде

$$s^* = (S_1 - S_3)/\sigma_z = k_s \hat{s}, \tag{13}$$

где

$$k_s = \sqrt{\{2[3A - (\Phi_d/3)S_0^2\cos 3\theta]/\Phi_m\}/\sigma_z} = s^*/\hat{s}.$$
 (14)

Коэффициент  $k_s$  может быть больше или меньшие единицы в зависимости от особенностей свойств материала. Необходимо отметить, что в частном случае,

когда  $\Phi_d=0$ , то  $k_s=1$ , то есть при любых тензорно-линейных уравнениях связи деформаций с напряжениями, соотношение (12) вырождается в (9) при  $\Phi_m=1/\mu$ .

Следовательно, расхождение кривых для относительных пределов текучести,  $s^*u^s$ , является показателем наличия тензорной нелинейности. Если для произвольного напряженного состояния величину предела текучести найти согласно данному определению

$$\sigma_s = \sqrt{6A/\Phi_\theta} \,\,, \tag{15}$$

где  $\Phi_{\theta}$  —обобщенная податливость по (5), то после преобразований из соотношения (12) получим другое выражение для относительного предела текучести

$$s^* = \hat{s}\sigma_s/\sigma_z\sqrt{\Phi_\theta/\Phi_m^*} , \qquad (16)$$

где  $\Phi_{\mathbf{m}}^* = \Phi_{\mathbf{m}} + 2/3\Phi_{\mathbf{d}}\cos 3\theta -$  функция, связывающая среднюю и среднеквадратическую податливости. Анализ показывает, что множитель  $\sqrt{\Phi_{\mathbf{\theta}}/\Phi_{\mathbf{m}}^*} \cong 1_{\text{отличается}}$  от единицы четвертой значащей цифрой после запятой, поэтому можно принять  $k_s = s^*/\hat{s} \cong \sigma_s/\sigma_z$ .

Преобразования соотношения (12) с учетом определения (15) позволяют найти связь между интенсивностью напряжений и пределами текучести

$$S_0 = (S_1 - S_3)/(\hat{\mathbf{s}}) = \sigma_s \sqrt{\Phi_\theta/\Phi_m^*} \cong \sigma_s = k_s \sigma_z. \tag{17}$$

Результаты расчетов  $\mathbf{S}^*$  по соотношениям (13) и (16) практически совпадают и приведены в виде графика на рис. 5 кривой 2, призванной описать опытные данные Лоде. Они проводились по данным работы [2] для никеля. Опыт показывает, что вычислительные работы и графические построения удобней проводить, если параметр  $\lambda_{\sigma}$  заменить углом  $\boldsymbol{\theta}$ , связанными между собой соотношением

$$tg \theta = \sqrt{3} (\lambda_{\sigma} + 1) / (3 - \lambda_{\sigma}). \tag{18}$$

На рис. 6 а) приведены результаты расчетов, которые подтверждают гипотезу Лоде о независимости относительных пределов текучести  $s^*$  от деформации в процессе простого нагружения. При  $\theta = const$  вдоль оси  $e_0$  они представляются прямыми линиями: прямая 1 относится к растяжению, 2 – сдвигу, а 3 - двухосному растяжению. К тому же, исходя из определения (13), можно сделать вывод, что все кривые упрочнения  $s_0 \sim e_0$ 

никеля подобны. Каждую из них можно найти, если известно  $s^*$  и диаграмма для растяжения, которая является непрерывным множеством пределов  $\sigma_z$ .

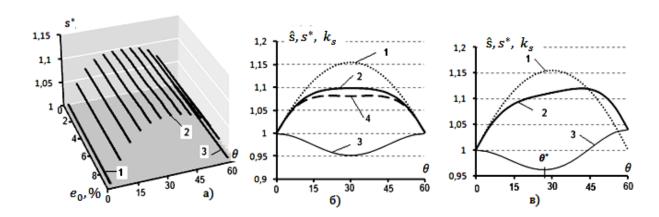


Рис. 6. Зависимость относительных пределов текучести и коэффициента  $\mathbf{k_s}$  от угла  $\mathbf{\theta}$ : а)  $\mathbf{s^*}$  - вдоль оси  $\mathbf{e_0}$  - прямая 1 - растяжение, 2 - сдвиг, 3 - двухосное растяжение; б) кривая 1 - «эталонная», кривые 2 и 4 -  $\mathbf{s^*}$  для разных значений  $\Delta$  между кривыми упрочнения, кривая 3 -  $\mathbf{k_s}$ ; в) кривая 1 - «эталонная», кривая 2 -  $\mathbf{s^*}$  при неравенстве пределов на границах, кривая 3 -  $\mathbf{k_s}$  при  $\mathbf{e_0} = \mathbf{const}$ .

На рис. 6 б) кривая 1 представляет «эталонную», но уже как зависимость  $\hat{s}$  от угла  $\theta$ . Кривые 2 и 4 относительные пределы  $s^*$ , причем первая из них относится к отклонению по напряжениям  $d \approx 10\%$  между кривыми упрочнения для  $d \approx 10\%$  (сдвига) и  $d \approx 10\%$  а вторая  $d \approx 12\%$  (при деформации  $d \approx 10\%$  для никеля). Кривая 3 иллюстрируют поведение коэффициента  $d \approx 10\%$  все они относятся к значению  $d \approx 10\%$  с

Вогнутость кривой 4 можно связать с нарушением условия выпуклости поверхности текучести. Это условие можно сформулировать следующим образом, используя определение (16) для относительных пределов текучести  $\mathbf{s}^*$  и первое равенство выражения (17), согласно значению производной

$$\frac{ds^*}{d\theta} = \frac{d(\hat{s}S_0/\sigma_z)}{d\theta} = \frac{d(S_1 - S_3)/\sigma_z}{d\theta} = 0,$$
 (19)

допустимо величину  $S_1 - S_3$ )/ $\sigma_z$  считать постоянной при деформации  $e_0 = const$  на отрезке вершины кривой 2, а не три экстремума кривой 4. Допуская первое, можно считать значение  $\Delta \approx 12\%$  завышенным, относя его к неточности измерения опытных данных или их обработки.

Графики на рис. 6 б) симметричны относительно  $\theta = 30^\circ$ , что согласуется с принятым допущением [2] о равенстве пределов текучести, как при простом растяжении, так и при двухосном. Анализ результатов работ [1], [3], [4] и других исследователей показывает, что предположение о независимости кривых упрочнения от знака параметра Лоде  $\lambda_{\sigma}$ , не всегда подтверждается. При положительном знаке, например, в работе [1] для  $\lambda_{\sigma} = 1$  значения напряжений лежат на 3-4 % выше, чем при значении  $\lambda_{\sigma} = -1$ . Этот факт отражается на графиках для относительного предела текучести  $s^*$ .

На рис. 6 в) представлена зависимость относительных пределов текучести от угла  $m{\theta}$  при значении  $m{A} = m{A_o}$ , где  $m{A_o}$  - энергия, соответствующая начальной пластической деформации. Кривая 1 - «эталонная», кривая 2 представляет  $m{s}^*$ , кривая 3 иллюстрируют поведение коэффициента  $m{k_s}$ . Учет неравенства пределов текучести на границах участка плоского напряженного состояния приводит к не симметричности кривой 2 с появлением ее вогнутости при  $m{\theta} = m{30}^\circ$ . Исключение вогнутости достигается при  $m{\Delta} \approx m{8,2\%}$ . На поведение относительных пределов текучести  $m{s}^*$  вдоль оси  $m{e_0}$  отмеченное не отражается.

Кривая 3 для коэффициента  $k_s$  на рис. 6 б) по форме подобна кривой сечения пучка диаграмм на рис. 3 а) и тем самым отражает тот факт, что минимальное сопротивление пластической деформации проявляется при  $\theta = const$  при равенстве пределов текучести на границах, а кривая 3 на рис. 6 в) при их различии. На рис. 3 б) кривая 2, иллюстрирующая зависимость деформации  $e_0$  от угла  $\theta$ , относится к симметричному варианту, а кривая 3 - к несимметричному. Кривые 2 и 3 могут быть построены только при наличии характеристик  $\Phi_m$  и  $\Phi_d$ , помощью которых выполнен расчет по описанию опытных данных Лоде. Кривая 2 на рис. 5 учитывает выявленные поправки. Опытные точки испытаний Лоде и эта кривая показывают зависимость пределов текучести от вида напряженного состояния, а, следовательно, и тензорную нелинейность. Кривые 2 для относительных пределов текучести  $s^*$  на рис. 6 б) и в) свидетельствует о том, что поверхность текучести отличается от круговой, то есть является неротационной.

Для алюминиевого сплава 24S-T4 диаграммы  $S_0 \sim e_0$ , представленные в работе [13], располагаются в другой последовательности. Выше всех лежит диаграмма испытаний при сжатии,  $\theta = \pi/3$ , а ниже диаграмма испытаний при растяжении  $\theta = 0$ . Диаграмма при чистом сдвиге,  $\theta = \pi/6$ , рассчитана по методике, описанную в работе [7], учитывающей текущую разномодульность при растяжении и сжатии и занимает положение между ними. Диаграммы представляют собой кривые, не имеющие площадок текучести. Характеристикой пластичности для таких материалов является условный предел текучести, например,  $\sigma_{0,2}$ . Отмеченная особенность расположения диаграмм  $S_0 \sim e_0$ , проявляется на методике определения относительных пределов текучести  $s^*$ , изложенной выше для никеля.

На рис. 7 а) приведены результаты расчетов, которые согласуются с гипотезой Лоде о независимости относительных пределов текучести от деформации в процессе простого нагружения, поэтому при  $\theta = const$  вдоль оси  $e_0$  они представляются прямыми линиями, подчеркивая тот факт, что кривые упрочнения сплава 24S-T4 подобны, как и для никеля. На рис. 7 а) прямая 1 – для растяжение, 2 – сдвига, а 3 - сжатия. На рис. 7 б) кривая 1 - «эталонная» и кривая 2 - для величин  $s_1^*$  и  $s_2^*$  рассчитаны при значении  $s_3^*$  величин  $s_4^*$  прямая 1 м растяжение рассчитаны при значении  $s_4^*$  величин  $s_4^*$  прямая 1 м растяжение рассчитаны при значении  $s_4^*$  прямая 1 м растяжение растяжение рассчитаны при значении  $s_4^*$  прямая 1 м растяжение растяжени

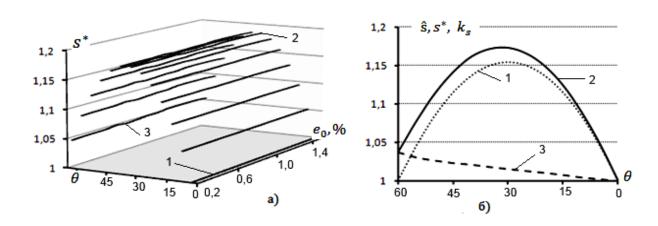


Рис. 7. Зависимость относительных пределов текучести сплава 24S-T4: а)  $\mathbf{s}^*$  вдоль оси  $\mathbf{e_0}$  при  $\mathbf{\theta} = \mathbf{const}$ : прямая 1 - при растяжении, 2 - при сдвиге, 3 – при сжатии; б): кривая 1 - «эталонная», кривая 2 для  $\mathbf{s}^*$ , кривая 3 -  $\mathbf{k_s}$ .

Кривая 2 лежит выше «эталонной» при всех значениях угла  $^{m{\theta}}$ . Она соприкасается с «эталонной» только в одной точке, соответствующей растяжению,  $^{m{\theta}}=^{m{0}}$ . Кривая 3 для коэффициента  $^{m{k_s}}$  от таких же кривых для металлов отличается отсутствием экстремума. При этом минимальное значение коэффициента  $^{m{k_s}}$  при угле  $^{m{\theta}}$  сдвигается от угла  $^{m{\theta}}=^{m{0}}$  и тем самым уточняет положение напряженного состояния с минимальным сопротивлением пластической деформации.

Таким образом, проведенный анализ экспериментальных результатов, представленных в работах результатов работ [1], [2], [3], [4] и [13] указывает на зависимость характеристик формоизменения, пределов текучести и на положение кривых упрочнения в целом, от вида напряженного состояния. Отмеченный выше подход В. Лоде к анализу результатов испытаний получил в данном разделе развитие в качестве методики, позволяющей исключить неточности, возникающие при обработке опытных данных, а также проводить проверку на наличие напряженных состояний с минимальным сопротивлением пластической деформации и на оценку подобия кривых упрочнения.

# 4 Вывод определяющих уравнений, учитывающих подобие кривых упрочнения и эффекта «разрыхления»

Разработка методов решения задач, учитывающих тензорную нелинейность, должно базироваться на достаточно зарекомендовавших себя подходах в теории упругости и теории пластичности. Поскольку при использовании тензорно-нелинейных уравнений связь между деформациями и перемещениями приводится к весьма громоздким выражениям, поэтому для решений практических задач необходимо применять численные методы. В работе [7] показано, что тензорно - нелинейные уравнения приводятся к виду характерному для анизотропного тела. В этом случае в качестве физических соотношений могут найти применение уравнения (1). Тем не менее, этот путь сопряжен с большим объемом вычислений для определения характеристик и использования различных допущений.

Внедрение тензорно - нелинейных уравнений для решения задач необходимо начинать с их представлением в наиболее простом виде. Для этого можно воспользоваться теоретическими материалами, которые выполнены В. В. Новожиловым [9]. Как принято в этой работе, если условие упрочнения связать с внутренними возрастающими силами, то оно может быть представлено в виде

$$F = (1 + k_1 \sigma_0 / E) S_0, \tag{20}$$

$$S_0=1/\sqrt{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sqrt{2/3}S_0$$
,  $\sigma_0=\sigma_{ii}/3$ ,  $k_1/E=1/S$ , а  $S$  представляет собой теоретическую прочность материала.

При использовании ассоциированного закона течения, приращения пластических деформаций определяются по соотношению

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = h \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} dF = \left[ \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{S_0} \left( 1 + \frac{k_1 \sigma_0}{E} \right) + \frac{k_1 S_0}{E} \delta_{ij} \right] h dF.$$
 (21)

Этот тензор может быть разделен на девиатор, который с учетом незначительности влияния среднего напряжения на формоизменение, может быть принят в виде

$$de_{ij}^p = rac{3}{2} rac{S_{ij}}{S_0} \left( 1 + rac{k_1 \sigma_0}{E} 
ight) h dF pprox rac{3}{2} rac{S_{ij}}{S_0} h dF,$$

и шаровую часть, представляющую собой остаточное изменение объема (дилатансию)

$$d\varepsilon_0 = \frac{k_1 S_0}{E} h dF.$$
 Определяя длину дуги пластической деформации 
$$d\lambda = \sqrt{\frac{2}{9}} de_{ij}^p de_{ij}^p \approx h dF,$$
 составляющие тензора можно привести к виду

$$de_{ij}^{p} \approx \frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{S_{0}} d\lambda, \tag{22}$$

$$d\varepsilon_0 = \frac{k_1 S_0}{E} d\lambda. \tag{23}$$

Полученные соотношения в дифференциальном виде интегрируются только для частных случаев нагружения. Наиболее распространенным является случай простого нагружения, для которого справедливы равенства:  $S_{ij} = q s_{ij}^*$ ,  $S_0 = q s_0^*$ ,  $\sigma_0 = q \sigma_0^*$ , где q — параметр, изменяющийся на отрезке от 0 до 1, а  $s_{ij}^*$ ,  $s_0^*$  и  $\sigma_0^*$  — начальные значения простого процесса [10]. Интегрирование (22), с учетом упругой части при значении дуги пластической деформации  $\lambda_*$ , приводит девиатор после преобразований с использованием определения деформации  $\epsilon_0$ , к виду

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{3\lambda_*}{S_0} \right) = \frac{S_{ij}}{2G_s} = \frac{3 e_0 S_{ij}}{2S_0}$$
 (24)

где  $G_s$  — секущий модуль, совпадающий по значению с  $G_{\theta} = S_0/3e_0$  — обобщенным модулем сдвига, используемым ранее в тензорно - нелинейных уравнениях.

Если материалы проявляют подобие кривых упрочнения, в соответствии с соотношением (17), по которому  $S_0 \cong k_s \sigma_z$ , то уравнения (24) можно упростить

$$e_{ij} = \frac{3e_0 S_{ij}}{2k_s \sigma_z} = \frac{S_{ij}}{2k_s G_z} \tag{25}$$

где  $G_z$ —секущий модуль, который определяется только по диаграмме растяжения, при этом коэффициент  $k_s = s^*/\hat{s}$ , не зависящий от деформации  $e_0$ , содержит в себе информацию о тензорной нелинейности и расставляет зависимости  $s_0 \sim e_0$  в соответствии со значением угла  $s_0 = const$ . Коэффициент может быть установлен по результатам таких испытаний, как в [1], или теоретически, согласно соотношению  $s_0 = s^*/\hat{s} \simeq \sigma_s/\sigma_z$ 

Интегрирование (23) с учетом упругой части  $\varepsilon_0^y = \sigma_0/3K_{\rm u}$  заменой постоянной величины  $k_1/E$  переменной  $\mathbf{æ}\boldsymbol{\Phi}_d$ , такого же порядка малости, приводит уравнение для объемной деформации к виду, вывод который проведен в работе [7], а именно

$$\varepsilon_0 = \Phi_k \sigma_0 / 3 + 2\varkappa \Phi_d S_0 / 9 \tag{26}$$

 $m{\Phi}_k = 1/K$ , K- модуль упругости при объемной деформации,  $m{\Phi}_d-$  среднеквадратическая податливость при формоизменении. Введение второго

слагаемого в уравнение (26) необходимо с целью отразить реальный физический процесс накопления деформации «разрыхления», сопровождающий пластическую деформацию.

Таким образом, проведенные в этой работе исследования позволили тензорно – нелинейные уравнения (1) привести к уравнениям деформационной теории для случая активного нагружения, при котором интенсивность напряжений возрастает, то есть  $\Delta S_0 > 0$  при всех значениях угла  $\theta$ . При таком нагружении происходит и рост пластической деформации. Пределы текучести  $\sigma_{s0}$ , соответствующие  $A_o$ , являются переменными величинами, изменяющимися от угла  $\theta$  так же, как и коэффициент  $k_s$ . Если эти пределы отождествлять с пределами пропорциональности, то возникнет начальная разномодульность.

При больших отклонениях по деформации  $^{4}$ , как, например, у стали ЭИ415, начальная разномодульность будет не соответствовать реальной. В таком случае упругий участок можно описать кривой, например, параболой, вводя три значения модуля упругости:  $^{4}$  — в начале координат,  $^{6}$  =  $^{6}$  =  $^{6}$  =  $^{6}$  в конце этого участка и их полусумму на высоте, например,  $^{6}$  возможны варианты и с учетом начальной разномодульности. Для этого можно воспользоваться алгоритмом, описанным в [7]. Определяющие уравнения (25) имеют, естественно, недостатки по сравнению с уравнениями (1). Основное их достоинство состоит в том, что они без особых трудностей могут быть введены в готовые программы для расчетов изделий на ЭВМ, учитывая тензорную нелинейность с принятыми допущениями. Современная вычислительная техника и вычислительные методы позволяют отказаться от различных допущений. К таким допущениям можно отнести и гипотезу о единой кривой.

#### Заключение

Используя методику восстановления материальных функций (характеристик формоизменения), подробно описанную в работе [7], опираясь на анализ экспериментальных результатов исследований, с помощью тензорно-нелинейных уравнений связи деформаций с напряжениями, получены следующие результаты:

а) выявлены особенности проявлений тензорной нелинейности пластических материалов. Установлена теоретическая связь между параметрами Лоде, показано, что их разница  $\Delta\lambda$ , характеризующая степень отклонения от подобия девиаторов напряжений и деформаций, наглядно представляет тензорную нелинейную сущность этого эффекта при равенстве податливостей в направлении главных касательных напряжений эти девиаторы подобны. Анализ экспериментальных исследований дает возможность выявить дополнительную деформацию  $\varepsilon_g$ , которая является деформацией «разрыхления» и зависит от вида напряженного состояния. Предложена графоаналитическая методика для обработки результатов испытаний и восстановления диаграмм Лоде. Показано, что разница  $\Delta\lambda$  имеет при значении угла  $\theta = \pi/6$  величину близкую к максимальной, а следовательно, и максимальное отклонение от подобия девиаторов;

- б) проведен анализ результатов испытаний таких материалов, как сталь, никель, медь и дюралюминий, установлена закономерность положения кривых упрочнения в координатах «интенсивность напряжений интенсивность деформаций» и их зависимость от вида напряженного состояния. Предложен подход к количественной оценке отклонений по напряжениям и деформациям, используя метод сечения пучка диаграмм плоского напряженного состояния и вводя третью координату, угол вида этого состояния. Показано, что математические модели, принимающие за основу «единую кривую», будут иметь ошибки, соответствующие найденным отклонениям, исчисляемых в несколько десятков процентов;
- в) в развитие идеи В. Лоде предложен подход к анализу результатов испытаний, позволяющий исключать неточности положений диаграмм (по условию выпуклости поверхности текучести), возникающие при обработке опытных данных. Этот подход дает возможность проводить оценку подобия кривых упрочнения, а главное, определять значения коэффициента, содержащего информацию о положении кривых упрочнения по координате  $\theta$ ;
- г) используя один из вариантов теории В. В. Новожилова, выполнен вывод определяющих уравнений деформационной теории пластичности, учитывающей эффект «разрыхления», подобие кривых упрочнения и их зависимость от вида напряженного состояния. Показано, что при этом повышается точность определения, как напряжений, так и деформаций.

### Список литературы

- 1. Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов // Теория пластичности: сб. статей / пер. с англ., фр., и нем. Л.А. Телешевой и Ю.А. Цвибак; под ред. Ю.Н. Работнова. М.: Изд.-во иностр. лит., 1948. С. 168-205.
- 2. Ягн Ю.И., Митрохин Н.М. О систематическом отклонении от законов пластичности // Докл. АН СССР. 1960. Т. 135, № 4. С. 796-799.
- 3. Дэвис Е. Рост напряжений с изменением деформаций и зависимость "напряжения деформации" в пластической области для меди при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности : сб. статей / пер. с англ., фр., и нем. Л.А. Телешевой и Ю.А. Цвибак; под ред. Ю.И. Работнова. М.: Изд-во иностранной литературы, 1948. С. 336-374.
- Жуков А.М. Сложное нагружение и теории пластичности изотропных материалов // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1955. № 8. С. 81-92.
- 5. Taulor G., Quinney H. The plastic listortion of metals // Philosophical transactions of the Royal Society. Ser. A. 1931. Vol. 230. P. 323-362.
- 6. Комков К.Ф. К определению параметров Лоде при обработке результатов испытаний // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 2005. № 2. С. 126-135.

- 7. Комков К.Ф. О тензорной нелинейности структурно-неоднородных материалов // Наука и образование. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 8. DOI: 10.7463/0812.0466666
- 8. Новожилов В.В. О пластическом разрыхлении // Инженерный журнал. Механика твердого тела . 1965. Т. 29, № 4. С. 681-689.
- 9. Комков К.Ф. К определению напряженного состояния с наименьшим сопротивлением пластической деформации // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2012. № 6. С. 59-62.
- 10. Ильюшин А.А. Пластичность. Ч. 1. Упругопластические деформации. М.: Логос, 2004. 376 с.
- 11. Белл Дж. Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел. В 2 ч. : пер. с англ. М.: Наука, 1984. Ч. 1. 596 с.; Ч. 2. 431 с.
- 12. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1969. 863 с.

#### SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

## SCIENCE and EDUCATION

EL Nº FS77 - 48211. Nº0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

### **Tensor nonlinearity of plastic materials**

# 04, April 2013

DOI: 10.7463/0413.0567103

Komkov K.F.

Russia, Balashikha, Military-Technical University 06kfk38@mail.ru

Works of Lode V., Yagna Yu. I. and other researchers point to the presence of deviations from the laws of plasticity that found wide application in scientific literature. Analysis of the results of studies with such materials as steel, nickel, copper, and duralumin shows the possibility of studying and description of marked deviations from the standpoint of modern representations of the tensor of nonlinearity. In this work, on the basis of the results of the mentioned works, it was shown that consideration of this non-linearity leads to increases in accuracy of determination of both stresses and deformations, if we reject a single relation between intensity of stress and intensity of deformations. For this purpose, derivation of determining equations of the deformation theory of plasticity, which takes into account the effect of loosening, a form of hardening curves and their dependence on the kind of stressed state was performed using one of the variants of the theory of V. V. Novozhilova.

Publications with keywords: <u>yield limit</u>, <u>anisotropy</u>, <u>tensor non-linearity</u>, <u>the laws of plasticity</u>, <u>non-linear characteristics</u>, <u>the effect of «loosening»</u>

Publications with words: <u>yield limit</u>, <u>anisotropy</u>, <u>tensor non-linearity</u>, <u>the laws of plasticity</u>, <u>non-linear characteristics</u>, <u>the effect of «loosening»</u>

### References

- 1. Lode V. Vliianie srednego glavnogo napriazheniia na tekuchest' metallov [The influence of the average principal stress on the fluidity of metals] (Russian translation). In: *Teoriia plastichnosti : cb. statei* [Theory of plasticity : collection of articles]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1948, pp. 168-205.
- 2. Iagn Iu.I., Mitrokhin N.M. O sistematicheskom otklonenii ot zakonov plastichnosti [About the systematic deviation from the laws of plasticity]. *Dokl. AN SSSR* [Reports of Academy of Sciences of the USSR], 1960, vol. 135, no. 4, pp. 796-799.
- 3. Davis E.A. Increase of stress with permanent strain and stress-strain relations in the plastic state for copper under combined stresses. *J. Appl. Mech., Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, Dec. 1943, vol. 10, no. 4, pp. A-187 A-196. (Russ ed.: Devis E. Rost napriazhenii s izmeneniem

- deformatsii i zavisimost' "napriazheniia deformatsii" v plasticheskoi oblasti dlia medi pri slozhnom napriazhennom sostoianii. In book: *Teoriia plastichnosti : cb. statei* [Theory of plasticity : collection of articles]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1948, pp. 336-374.).
- 4. Zhukov A.M. Slozhnoe nagruzhenie i teorii plastichnosti izotropnykh materialov [Complex loading and plasticity theory of isotropic materials]. *Izvestiia AN SSSR. OTN. Mekhanika i mashinostroenie*, 1955, no. 8, pp. 81-92.
- 5. Taulor G., Quinney H. The plastic listortion of metals. *Philosophical transactions of the Royal Society. Ser. A*, 1931, vol. 230, pp. 323-362.
- 6. Komkov K.F. K opredeleniiu parametrov Lode pri obrabotke rezul'tatov ispytanii [The calculation of the Lode parameters when processing the results of experiments]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela* [A Journal of Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2005, no. 2, pp. 126-135. (Trans. version: *Mechanics of Solids*, 2005, vol. 40, no. 2, pp. 104-112).
- 7. Komkov K.F. O tenzornoi nelineinosti strukturno-neodnorodnykh materialov [Tensor nonlinear structurally heterogenious materials]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 8. DOI: <u>10.7463/0812.0466666</u>
- 8. Novozhilov V.V. O plasticheskom razrykhlenii [Plastic loosening]. *Inzhenernyi zhurnal*. *Mekhanika tverdogo tela*, 1965, vol. 29, no 4, pp. 681-689.
- 9. Komkov K.F.K opredeleniiu napriazhennogo sostoianiia s naimen'shim soprotivleniem plasticheskoi deformatsii [Determination of stress state with the least resistance to plastic deformation]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriia 1. Matematika i mekhanika*, 2012, no. 6, pp. 59-62.
- 10. Il'iushin A.A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Ductility. Part 1. Elastic-plastic deformation]. Moscow, Logos, 2004. 376 p.
- 11. Bell J.F. The Experimental Foundations of Solid Mechanics. In: Truesdell C., ed. *Encyclopedia of Physics. Vol. 6a/1. Mechanics of Solids*, Springer-Verlag, Berlin. 1973. (Russ. ed.: Bel Dzh. F. *Eksperimental'nye osnovy mekhaniki deformiruemykh tverdykh tel.* Moscow, Nauka, 1984. Ch. 1. 596 p.; Ch. 2. 431 p.).
- 12. Nadai A. *Theory of Flow and Fracture of Solids*. Vol. 2. McGrow Hill Book Company, Inc., New York Toronto London, 1963. (Russ. ed.: Nadai A. *Plastichnost' i razrushenie tverdykh tel.* T. 2. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoi literatury, 1969. 863 p.).