электронный журнал
МОЛОДЕЖНЫЙ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
Издатель ФГБОУ ВПО "МГТУ им. Н.Э. Баумана". Эл No. ФС77-51038.

УДК 531.01/534.112

Свободные колебания упругих одномерных систем с трением

Д.В. Калюжнов

Студент, "Холодильная, криогенная т ехника и кондиционирование"
МГТУ им. Н.Э. Баумана, г. Москва, Россия

Научный руководитель: А.А. Пожалостин, д. т. н.,
профессор кафедры «Теоретическая механика» МГТУ им. Н.Э. Баумана,
г. Москва, Россия

В настоящей работе впервые разработан приближенный аналитический метод для расчета малых свободных колебаний одномерных систем с сухим трением. Сведений в литературе по этому вопросу нет. Приведены примеры продольных, крутильных и поперечных колебаний упругих стержней, валов и балок.

Подобные задачи встречаются на практике, например, в связи с ремонтом газо- и нефтепроводных систем, а также в самолетостроении, где имеются достаточное количество длинных трубопроводов.

Основные допущения состоят в следующем:

1. Сухое трение считается небольшим.
2. Предполагается, что формы собственных колебаний не изменяются при учете трения.

Известно, что последнее условие применяется при расчете колебаний механических систем с малым вязким сопротивлением и в гидроупругости. Кроме этого считается колебания малые, материал подчиняется закону Гука, однороден, депланация сечений стержня отсутствует, справедлива гипотеза сплошности среды.

Для построения методики расчета используется метод приведенных (эквивалентных) параметров и энергетический метод.

Иллюстрируем разработанную методику расчета на примере продольных колебаний однородной консоли (рис. 1).

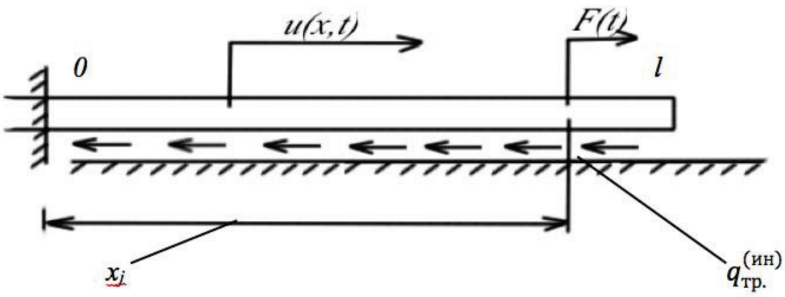

Рис. 1. Продольные колебания однородной консоли

На рис. 1: *u(x,t)* – перемещение материального сечения *x* стержня в продольном направлении. Предположим, что на балку действует равномерно распределенная сила сухого трения интенсивности $q_{тр.}^{(ин)} = \frac{G}{l} \cdot \delta$, *G* - сила тяжести стержня, *l* - его длина, δ - коэффициент кулонова трения 1-го рода.

Дифференциальное уравнение продольных колебаний имеет вид [1]:

$$EF_0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где μ_0 – погонная масса, EF_0 – жесткость стрержня в продольном направлении.

По методу Фурье [1] частное решение уравнения (1) примем в виде:

$$u(x,t) = f(x)S(t), \quad (2)$$

где $f(x)$ - форма колебания, *S(t)* - временной множитель.

Граничные условия системы (рис. 1) для функции f суть:

$f(0) = 0, f''(e) = 0.$

Решение для $f(x)$ имеет вид [1]:

$$f_i = sin\frac{(2i-1)}{2}\frac{\pi x}{l} \quad (3)$$

где *i* = 1,2,…,…

На этом первом этапе решения как видно силы $q_{тр.}^{(ин)}$ не рассматриваются.

Функция $S_i(t)$:

$$S_i(t) = A_i cos(\omega_i t - \alpha_i), \quad (4)$$

где A_i и α_i константы, подлежащие определенно, ω_i - частота i-го тона свободных колебаний.

Решение *u(x,t)* должно удовлетворять начальным условиям:

$$u(x,t) = \varphi(x); \frac{\partial u}{dt}(x,t) = \psi(x) \quad (5)$$

Таким образом, решение (1) имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x) cos(\omega_i t - \alpha_i) \quad (6)$$

Известно [1,2], что функции $f_i(x)$ удовлетворяют условиям ортогональности

$$\int_0^l \mu_0 \, f_i(x) f_i(x) dx \text{ при } i \neq j$$

Построим для колебаний консоли приведенную, эквивалентную систему. Основным постулатом при этом является равенство частот собственных колебаний консоли (уравнение (1)) и ее механического аналога [3].

Механический аналог представим в виде бесконечной системы линейных осцилляторов (рис. 2):

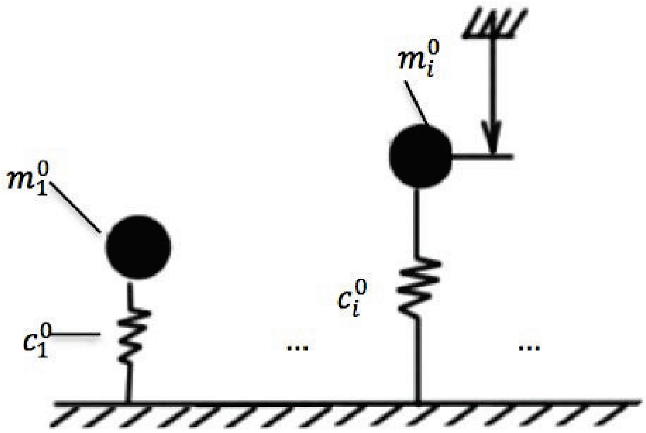

Рис. 2. Механический аналог консоли

Постулируя равенство собственных частот колебаний системы и механического аналога и сравнивая кинетические и потенциальные энергии системы [3] будем иметь:

$$m_i^0 = \int\limits_0^l \mu_0 f_i^2(x) dx,$$

$$c_i^0 = \int_0^l EF_0 \, (f_i')^2 dx,$$

m_i^0, c_i^0 – приведенная масса и жесткость механического аналога соответственно.

Система собственных функций $f_i(x)$ i=1,2,…,… полна и обладает свойством ортогональности [2].

Для учета сил сухого трения разложим силы трения $q_{\text{тр}}$ в ряд по $f_i(x)$

$$\frac{G}{l} \cdot \delta \neq \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i(x),$$

получим

$$a_i = \frac{G}{\pi} \cdot \frac{4\delta}{(2i-1)l} \tag{7}$$

Воспользуемся энергетическим методом для определения величины эквивалентного вязкого трения для каждого номера *i*. Для этого приравняем работу сил вязкого трения $A_{тр}$ за период свободных колебаний $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ работе сил сухого трения (7) для каждого номера *i*.

$$\int_0^l \int_0^{T_i} \mu_i \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dxdt = 4a_i \int_0^l A_i f_i(x)dx, \quad (8)$$

где $u_i = A_i f_i(x) \cdot cos(\omega_i t - \alpha_i)$.

Отсюда коэффициент приведенного линейного сопротивления μ_i равен:

$$\mu_i = \frac{4a_i\delta}{T_i \pi (2i-1)A_i} \quad (9)$$

Дифференциальное уравнение для *i* – го осциллятора имеет вид:

$$\ddot{y}_i + 2n_i\dot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0, \quad (10)$$

где

$$2n_i = \mu_i^0/m_i^0 \,, \mu_i^0 = \mu_i \|f_i(x)\|$$

$\|f_i(x)\|$ - норма функции $f_i(x)$.

Решение уравнения (10):

$$y_i(t) = A_i e^{-n_i t} \cdot cos(\omega_{1i} t - \alpha_i), \quad (11)$$

где

$$\omega_{1i}^2 = \omega_i^2 - n_i^2 \quad (12)$$

Частота ω_{i1} зависит от неизвестной постоянной A_i.

С учетом (11) общее решение уравнения (1) с учетом трения будет

$$y_i(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i f_i(x) e^{-n_i t} \cdot cos(\omega_{1i} t - \alpha_i) \quad (13)$$

Удовлетворим начальным условиям:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \,(cos\alpha_i) f_i(x) \\ \psi(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} A_i n_i \,(cos\alpha_i) f_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \omega_{1i} (sin\alpha_i) f_i(x) \end{cases} \quad (14)$$

Используя условия ортогональности, получим:

$$A_j = \frac{\int_0^l \varphi(x) f_i(x) dx}{\|f_j\| cos\alpha_j}$$

или

$$A_j cos\alpha_j = b_{1j}$$

Из второго условия

$$\psi(x) = -\sum_{i=1}^{\infty} b_{1i} n_i\, f_i(x) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \omega_{1i} sin\alpha_i f_i(x)$$

или с учетом условий ортогональности имеем:

$$\int_0^l \psi(x)\, f_j(x) dx = [-b_{1j} n_j + A_j \omega_{1j} sin\alpha_j] \|f_j\| \tag{15}$$

Обозначим

$$\frac{\int_0^l \psi(x)\, f_j(x) dx}{\|f_j\|} = b_{2j},$$

тогда

$$A_j sin\alpha_j = \frac{1}{\omega_{1j}} (b_{2j} + b_{1j} n_j), \tag{16}$$

Кроме того, $A_j cos\alpha_j = b_{1j}$, отсюда возводим последние два равенства в квадрат и складывая, получим:

$$A_j = \sqrt{b_{1j}^2 (A_j) + \frac{1}{\omega_{1j}^2} (b_{2j} + b_{1j} n_j)^2} \tag{17}$$

Решая трансцендентное уравнение (17), найдем A_j и

$$\alpha_j = arccos \frac{b_{1j}}{A_j}$$

Список литературы

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле, ГИФМЛ, Москва, 1959 г. – С. 439.
2. Шиманский Ю.А. Динамический расчет судовых конструкций, Судпромиз, Ленинград, 1963 г. – 253 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний, "Наука", Москва, 1968г. – 560 с.
4. Колесников К.С. Динамика ракет, Машиностроение, Москва, 2003 г. – С. 519.