НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408
электронный научно-технический журнал

Стабилизация аффинных систем с высоким индексом приводимости к квазиканоническому виду

09, сентябрь 2012
DOI: 10.7463/0912.0467824

Ткачев С.Б., Шевляков А.А.

УДК 517.977

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru

Введение

Один из известных подходов к решению задачи стабилизации положения равновесия стационарной аффинной системы с выходом основан на построении нормальной формы системы [1, 2].

Если выход аффинной системы не задан, то в качестве выхода может быть выбрана функция, определяющая преобразование системы к регулярному квазиканоническому виду [3, 4].

Если нормальная форма системы с заданным выходом в некоторой окрестности положения равновесия существует и имеет асимптотически устойчивую нулевую динамику, то известен вид обратной связи по состоянию, локально стабилизирующей рассматриваемое положение равновесия [1, 2].

Системы с асимптотически устойчивой нулевой динамикой называют минимально-фазовыми. Наличие свойства минимальной фазовости является существенным для решения задачи стабилизации.

В случае, если аффинная система не является минимально фазовой, проблема стабилизации ее положения равновесия оказалась достаточно сложной и подходы к ее решению известны в частных случаях. Одним из методов, позволяющих найти стабилизирующую обратную связь для неминимально фазовой системы, является метод виртуальных выходов [5–7]. Этот метод заключается в нахождении нового выхода, называемого виртуальным, для которого соответствующая нормальная форма имеет асимптотически устойчивую нулевую динамику.

В работах [5–7] проведено исчерпывающее исследование случаев, когда относительная степень выхода аффинной системы в положении равновесия определена и равна 1 или 2.

Исследуем случай, когда выход аффинной системы имеет относительную степень, большую двух, и укажем специальные виды систем, для которых в этом случае удается решить задачу стабилизации методом виртуальных выходов, а также опишем метод поиска виртуальных выходов, которым соответствует нормальная форма с асимптотически устойчивой нулевой динамикой.

1. Квазиканонический вид и нормальная форма аффинной системы

Рассмотрим гладкую стационарную аффинную систему со скалярным управлением

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = A(x) + B(x)u, x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^1,\\
&A(x) = (a_1(x), \ldots, a_n(x))^{\text{т}},\ B(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^{\text{т}},\\
&a_i(x), b_i(x) \in C^\infty(\Omega),\ i = \overline{1, n},\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n,\\
&\dot{(\,\cdot\,)} = \mathrm{d}(\,\cdot\,)/\mathrm{d}t,
\end{aligned} \tag{1}$$

где t — независимое переменное.

Пусть система (1) в некоторой окрестности U^0 точки x^0 преобразуется к виду

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho,\\
&\dot{z}_\rho = f(z, \overline{\eta}) + g(z, \overline{\eta})u,\\
&\dot{\overline{\eta}} = q(z, \overline{\eta}) + w(z, \overline{\eta})u,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_\rho)^{\text{т}}$, $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_m)^{\text{т}}$, $\overline{\eta} \in \mathbb{R}^m$, $\rho + m = n$, и $(z, \overline{\eta}) = \Phi(x)$ — соответствующая локальная гладкая невырожденная замена переменных.

Указанный вид называют [3,4] квазиканоническим видом системы (1). Если коэффициент $g(z, \overline{\eta})$ при управлении в точке $(z^0, \overline{\eta}^0) = \Phi(x^0)$ отличен от нуля, то квазиканонический вид называют регулярным в этой точке. В этом случае в силу гладкости коэффициент при управлении будет отличен от нуля и в некоторой окрестности указанной точки.

Отметим, что при $\rho = n$ система (2) содержит управление только в последнем уравнении и такой вид называют каноническим.

Условия, при которых система (1) локально преобразуется к регулярному квазиканоническому виду (2), удобно записать, используя дифференциально-геометрический подход, при котором гладкой аффинной системе (1) на Ω взаимно-однозначно соответствуют гладкие векторные поля

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Будем использовать обозначение $L_X \lambda(x)$ для производной Ли функции $\lambda(x)$ по векторному полю X.

Пусть существует достаточно гладкая функция $\phi(x)$, удовлетворяющая в некоторой окрестности точки x^0 системе нелинейных уравнений в частных производных

$$L_B L_A^i \phi(x) = 0, \ i = \overline{0, \rho - 2}, \tag{4}$$

для некоторого числа ρ, где $\rho \leq n$, а соответствующая ей функция $\gamma(x) = = L_B L_A^{\rho-1} \phi(x)$ в точке x^0 удовлетворяет условию

$$\gamma(x^0) = L_B L_A^{\rho-1} \phi(x^0) \neq 0. \tag{5}$$

Приведенные условия (4)–(5) эквивалентны тому, что в окрестности точки x^0 производные от функции $\phi(x)$ в силу системы (1) до порядка $\rho - 1$ не содержат управление, а в производную порядка ρ управление входит с коэффициентом, отличным от нуля в точке x^0, и, в силу гладкости, в некоторой окрестности точки x^0.

Из условия $\gamma(x^0) \neq 0$ вытекает, что $B(x^0) \neq 0$. Из условия (4) следует, что функции $L_A^i \phi(x)$, $i = \overline{0, \rho - 2}$, являются первыми интегралами векторного поля B. Выполнение условия (5) гарантирует локальную функциональную независимость функций $z_i = L_A^{i-1} \phi(x)$, $i = \overline{1, \rho}$.

К множеству функций $z_i = L_A^{i-1} \phi(x)$, $i = \overline{1, \rho}$, можно добавить еще $m = n - \rho$ функций $\overline{\eta}_k = \overline{\eta}_k(x)$ так, чтобы в окрестности точки x^0 получить невырожденную замену переменных $(z, \overline{\eta}) = \Phi(x)$, где $z = (z_1, \ldots, z_\rho)^{\mathrm{т}}$, $\overline{\eta} = (\overline{\eta}_1, \ldots, \overline{\eta}_m)^{\mathrm{т}}$, $\rho + m = n$. В новых переменных система (1) запишется в виде (2). Поскольку из $L_B L_A^{\rho-1}\phi(x^0) \neq 0$ следует, что $g(\Phi(x^0)) \neq 0$, квазиканонический вид будет регулярным в точке $\Phi(x^0)$.

Заметим, для системы (1) в общем случае могут существовать различные функции $\phi(x)$, удовлетворяющие условиям (4), которым могут соответствовать различные значения ρ от $\rho = 1$ до $\rho = \rho_{max} \leq n$, где ρ_{max} есть максимальное значение ρ, при котором удовлетворяются условия (4), (5). При $\rho = 1$ имеем $L_B\phi(x) \neq 0$ и управление входит в первую производную функции $\phi(x)$ в силу системы (1).

Вместо системы (4) можно использовать эквивалентную систему уравнений в частных производных первого порядка [3]

$$\operatorname{ad}_A^i B\phi(x) = 0, \quad i = 0, \ldots, \rho - 2,$$

где $\operatorname{ad}_A B = [A, B]$ — коммутатор векторных полей A и B,

$$\operatorname{ad}_A^i B = [A, \operatorname{ad}_A^{i-1} B], \quad \operatorname{ad}_A^0 B = B.$$

Квазиканонический вид (2) можно упростить за счет выбора специальной замены переменных. Поскольку $B(x^0) \neq 0$, в некоторой окрестности точки x^0 существуют $n-1$ функционально независимых первых интегралов векторного поля B, из которых для построения замены использовались только $\rho - 1$ функции $z_i = L_A^{i-1}\phi(x)$, $i = \overline{1, \rho - 1}$. Добавляя к ним функцию $z_\rho = L_A^{\rho-1}\phi(x)$ и еще $m = n - \rho$ первых интегралов $\eta_k = \eta_k(x)$ векторного поля B, в окрестности точки x^0 можно получить [2] такую невырожденную замену переменных $(z, \eta) = \Phi(x)$, что в новых переменных система (1) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho, \\ &\dot{z}_\rho = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ &\dot{\eta} = q(z, \eta). \end{aligned} \tag{6}$$

Такой специальный квазиканонический вид системы (1) более удобен для анализа.

Преобразование системы (1) к некоторому квазиканоническому виду всегда существует [3], но методы стабилизации положения равновесия для таких систем разработаны только в частных случаях.

Приведение аффинной системы к квазиканоническому виду (2) (или (6)) основано на поиске специальной функции $\phi(x)$, с использованием которой строится замена по части переменных z. Существует подход к преобразованию аффинных систем к специальному виду, используемый в случае, если такая функция уже задана. Эту функцию называют выходом аффинной системы (1) и с ней связывают цель управления — стабилизацию заданного значения выхода или отслеживание заданного изменения выхода как функции времени [1].

В качестве выхода может быть выбрана и произвольная досточно гладкая функция состояния системы — *виртуальный выход*.

Пусть функция $y = \phi(x)$, где $\phi(x) \in C^{\infty}(\Omega)$, — (виртуальный) выход аффинной системы (1). Предположим, что существует такое $\rho \geq 1$, что, во-первых, выполнены условия (4) и, во-вторых,

$$L_B L_A^{\rho-1}\phi(x^0) \neq 0. \tag{7}$$

Такое число ρ называют относительной степенью аффинной системы (1) с (виртуальным) выходом $y = \phi(x)$ в точке x^0 [1].

Если относительная степень $\rho = 1$ в точке x^0, то $L_B\phi(x^0) \neq 0$. Если $\rho > 1$, то первое условие означает, что функция $\phi(x)$ в окрестности точки x^0 является решением системы уравнений в частных производных (4), причем выполнено условие (7). Приведенные условия есть условия преобразования аффинной системы (1) к регулярному квазиканоническому виду (2) с индексом приводимости ρ.

Относительная степень в точке x^0 может быть неопределена, если не существует такое $\rho \leq n$, что выполнены условия (4) и (7).

Предположим, что для системы (1) задан выход

$$y = \phi(x), \tag{8}$$

относительная степень которого в точке x^0 равна ρ. Тогда в силу выполнения условия регулярности (7) система (1) может быть локально преобразована к специальному квазиканоническому виду (6), с которым связана система

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{\rho-1} = z_\rho,\\
&\dot{z}_\rho = f(z,\eta) + g(z,\eta)u,\\
&\dot{\eta} = q(z,\eta),\\
&y = z_1.
\end{aligned} \tag{9}$$

Систему (9) называют [1] нормальной формой системы (1) с выходом (8).

В случае, если замена переменных $(z, \eta) = \Phi(x)$, задающая преобразование системы (1) с выходом (8) к нормальной форме (9), определена на всем $\mathbb{R}^n$, и коэффициент при управлении в нормальной форме (9) отличен от нуля при всех $(z, \eta) \in \mathbb{R}^n$, то такую нормальную форму называют глобально определенной.

Таким образом, задача преобразования аффинной системы (1) с заданным выходом (8) к нормальной форме (9) является частным случаем задачи о преобразовании аффинной системы к квазиканоническому виду, поскольку в последней задаче требуется найти функцию ϕ, вводящую новые переменные z.

Отметим, что при поиске преобразования к квазиканоническому виду обычно ищут такую функцию ϕ, которой соответствует максимальное значение ρ, а при преобразовании к нормальной форме выясняют, определена ли относительная степень системы с заданным выходом в исследуемой точке и какова эта степень.

Любую аффинную систему со скалярным управлением можно рассматривать как систему, записанную в некоторой нормальной форме в окрестности точки x^0, где в качестве виртуального выхода выступает такая переменная состояния, что соответствующее этой переменной уравнение системы (производная виртуального выхода в силу системы) содержит управление и коэффициент при управлении отличен от нуля в точке x^0. Система с таким виртуальным выходом имеет в точке x^0 относительную степень 1.

В дальнейшем будем для системы (1) с некоторым виртуальным выходом использовать терминологию теории нормальной формы [1, 2].

Поскольку для фиксированной аффинной системы могут рассматриваться несколько виртуальных выходов, удобнее говорить не об относительной степени системы с заданным выходом в некоторой точке, а об относительной степени фиксированного выхода системы.

2. Стабилизация минимально фазовой системы

Не нарушая общности, рассмотрим задачу стабилизации положения равновесия $x^0 = 0$ системы (1). Пусть для нее найден виртуальный выход $y = \phi(x)$, $\phi(0) = 0$, относительная степень которого в точке $x^0 = 0$ равна ρ и $\rho < n$. Тогда в окрестности этой точки существует такая гладкая невырожденная замена переменных

$$z = \Phi(x),\ \eta = \Psi(x), \quad z \in \mathbb{R}^{\rho},\ \eta \in \mathbb{R}^{n-\rho}, \tag{10}$$

где $\Phi(x) = (\phi(x), L_A\phi(x), \ldots, L_A^{\rho-1}\phi(x))^{\mathrm{т}}$, $\Phi(0) = 0$, $\Psi(0) = 0$, что в переменных z, η аффинная система запишется в нормальной форме (9).

При решении задачи стабилизации нулевого положения системы, записанной в нормальной форме, важными являются свойства подсистемы относительно переменных η в (9) при $z \equiv 0$. Систему уравнений

$$\dot{\eta} = q(0, \eta) \tag{11}$$

называют уравнениями нулевой динамики (нулевой динамикой). Если ее положение равновесия $\eta = 0$ асимптотически устойчиво, то аффинную систему (1) с виртуальным выходом $y = \phi(x)$ называют минимально фазовой (в точке $x = 0$) [1].

Введенное для аффинных стационарных систем со скалярным управлением и скалярным выходом понятие нулевой динамики [1] аналогично указанному свойству для линейных систем [2].

Относительная степень выхода аффинной системы в случае линейной системы со скалярным управлением и выходом равна разности степеней знаменателя и числителя передаточной функции системы.

Пусть в положении равновесия $x^0 = 0$ система (1) является минимально фазовой. Выбрем для системы (1) управление в виде

$$u = \left(-L_A^{\rho}\phi(x) - \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k L_A^k \phi(x)\right) \Big/ L_B L_A^{\rho-1}\phi(x)\ , \tag{12}$$

где коэффициенты c_k, $k = 0, \ldots, \rho - 1$, выбраны так, что корни уравнения $\lambda^{\rho} + \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k \lambda^k = 0$ имеют отрицательные действительные части.

В переменных z, η управление (12) имеет вид

$$u = \left(-f(z, \eta) - \sum_{k=0}^{\rho-1} c_k z_{k+1}\right) / g(z, \eta)\ . \tag{13}$$

Тогда система (9) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= Az, \\ \dot{\eta} &= q(z, \eta), \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{\rho-2} & -c_{\rho-1} \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

причем матрица A имеет собственные числа со строго отрицательной действительной частью.

Управление (13) стабилизирует систему (9) по переменным z. При этом стабилизируемость по переменным η зависит от свойств нулевой динамики. При асимптотически устойчивой нулевой динамике положение равновесия $(z, \eta) = (0, 0)$ является асимтотически устойчивым [1].

Действительно, система (9), замкнутая управлением (13), имеет специальный каскадный вид (14). Условия асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия таких систем задает следующая теорема.

Теорема 1. [1] Система (14) асимптотически устойчива в нулевом положении равновесия $(z, \eta) = (0, 0)$, если функция $q(z, \eta)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(z, \eta) = (0, 0)$, $q(0, 0) = 0$, линейная система

$$\dot{z} = Az, \qquad (16)$$

асимптотически устойчива, а система

$$\dot{\eta} = q(0, \eta), \qquad (17)$$

асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

В случае, если нулевая динамика (17) не является асимптотически устойчивой, проблема стабилизации может быть решена в том случае, если будет найден такой новый (виртуальный) выход системы (1), что соответствующая ему нулевая динамика будет асимптотически устойчива. Тогда для новой нормальной формы, соответствующей этому выходу, можно построить стабилизирующую обратную связь вида (13) и затем переписать ее в исходные переменные.

3. Метод виртуальных выходов

Следуя [5], приведем основные результаты, обосновывающие метод виртуальных выходов при $\rho = 1$ и $\rho = 2$.

Для аффинной системы (1), считая $x^0 = 0$, фиксируем некоторый выход $y = h(x)$, $h(0) = 0$, при котором относительная степень системы (1) в точке $x = 0$ равна 1. Запишем систему (1) с этим выходом в соответствующей нормальной форме

$$\dot{z} = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \tag{18}$$

$$\dot{\eta} = q(z, \eta), \tag{19}$$

$$y = z.$$

В (18)–(19) $z \in \mathbb{R}^1$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $f(0,0) = 0$, $g(0,0) \neq 0$, $q(0,0) = 0$, $z = h(x)$, $\eta = \Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$.

Теорема 2. [5] Для того, чтобы аффинная система (1) имела виртуальный выход с относительной степенью $\rho = 1$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивой нулевой динамикой, необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия $\eta = 0$ нелинейной системы

$$\dot{\eta} = q(v, \eta) \tag{20}$$

с управлением v было стабилизируемо гладкой обратной связью $v = v(\eta)$. Каждой такой стабилизирующей обратной связи в системе (20) соответствует виртуальный выход $\phi = z - v(\eta) = h(x) - v(\Psi(x))$ аффинной системы (1) относительной степени $\rho = 1$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивая нулевая динамика.

Для аффинной системы (1) фиксируем некоторый выход $y = h(x)$, при котором относительная степень системы (1) в точке $x = 0$ равна 2. Запишем систему (1) с указанным выходом в соответствующей нормальной форме

$$\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \tag{21}$$

$$\dot{\eta} = q(z, \eta). \tag{22}$$

В (21)–(22) $z = (z_1, z_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-2})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-2}$, $f(0,0) = 0$, $g(0,0) \neq 0$, $q(0,0) = 0$, $z_1 = h(x)$, $z_2 = L_A h(x)$, $\eta = \Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$.

Теорема 3. [5] Пусть система (1) с виртуальным выходом ϕ, $\phi\Big|_{x=0} = 0$, имеет в точке $x = 0$ относительную степень $\rho = 2$, а нулевая динамика асимптотически устойчива. Если в переменных z, η нормальной формы (21)–(22)

$\phi'_{z_1}\Big|_{z=0,\eta=0} \neq 0$, то существуют функции $v_1(\eta)$, $v_2(\eta)$, $v_i(0)=0$, $i=1,2$, стабилизирующее положение равновесия $\eta=0$ системы

$$\dot{\eta} = q(v_1, v_2, \eta) \tag{23}$$

с управлениями v_1, v_2, причем

$$\frac{\mathrm{d}v_1(\eta)}{\mathrm{d}t}\Big|_{\dot{\eta}=q(v_1(\eta),v_2(\eta),\eta)} = v_2(\eta). \tag{24}$$

Теорема 4. [5] Пусть управления $v_1 = v_1(\eta)$, $v_2 = v_2(\eta)$ стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (23) и удовлетворяет условию (24). Если система (21)–(22) с виртуальным выходом $\phi(z,\eta) = z_1 - v_1(\eta)$ имеет относительную степень $\rho = 2$ в точке $(z,\eta) = 0$, то нулевая динамика, соответствующая виртуальному выходу ϕ, асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

4. Построение минимально фазовых систем и задача стабилизации в случае $\rho > 2$

Для аффинной системы (1) фиксируем некоторый виртуальный выход $y = h(x)$, при котором в точке $x=0$ относительная степень системы (1) равна r, $r > 2$. Запишем систему (1) в соответствующей нормальной форме

$$\begin{aligned}
&\dot{z}_1 = z_2, \ldots, \dot{z}_{r-1} = z_r,\\
&\dot{z}_r = f(z,\eta) + g(z,\eta)u,\\
&\dot{\eta} = q(z,\eta),\\
&y = z_1,
\end{aligned} \tag{25}$$

где $z = (z_1, z_2, \ldots, z_r)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^r$, $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-r})^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-r}$, $f(0,0) = 0$, $g(0,0) \neq 0$, $q(0,0) = 0$, $z_1 = h(x)$, $z_2 = L_A h(x), \ldots$, $z_r = L_A^{r-1}h(x)$, $\eta = \Psi(x)$, $\Psi(0) = 0$, $q(z,\eta) = (q_1(z,\eta), \ldots, q_{n-r}(z,\eta))^{\mathrm{T}}$.

Векторные поля, соответствующие системе (1), в координатах z, η примут вид

$$A = \sum_{i=1}^{r-1} z_{i+1}\frac{\partial}{\partial z_i} + f(z,\eta)\frac{\partial}{\partial z_r} + \sum_{k=1}^{n-r} q_k(z,\eta)\frac{\partial}{\partial \eta_k} \text{ и } B = g(z,\eta)\frac{\partial}{\partial z_r}.$$

Теорема 5. Пусть нормальная форма аффинной системы (1) с виртуальным выходом $y = h(x)$ в окрестности точки $x = 0$ имеет вид (25), причем $q(z, \eta) \equiv$ $\equiv p(y, \eta) \equiv p(z_1, \eta)$. Для того, чтобы аффинная система (1) имела виртуальный выход с относительной степенью $\rho = r$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивую нулевую динамику, необходимо и достаточно, чтобы положение равновесия $\eta = 0$ нелинейной системы

$$\dot{\eta} = p(v, \eta) \tag{26}$$

с управлением v было стабилизируемо гладкой обратной связью $v = v(\eta)$. Каждой такой стабилизирующей обратной связи в системе (26) соответствует виртуальный выход $y = z_1 - v(\eta) = h(x) - v(\Psi(x))$ аффинной системы (1) относительной степени $\rho = r$ в точке $x = 0$ и асимптотически устойчивая нулевая динамика.

◀ Доказательство необходимости. Пусть существует виртуальный выход ϕ аффинной системы (1), при котором относительная степень в точке $x = 0$ будет равна r, а нулевая динамика асимптотически устойчива. Запишем этот виртуальный выход в переменных z, η в виде $\phi = \phi(z, \eta)$ и построим соответствующую ему нормальную форму системы (1), используя запись (25) системы (1).

Покажем, что $\phi = \phi(z_1, \eta)$. Рассмотрим нормальную форму (25) с выходом $y = z_1$, относительная степень которого в точке $(z, \eta) = (0, 0)$ равна r. Соотношения (4), (7) в переменных z, η имеют вид

$$\begin{aligned} &L_B L_A^i z_1 = 0,\ i = \overline{0, r-2}, \\ &L_B L_A^{r-1} z_1|_{(z,\eta)=(0,0)} \neq 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Напомним, что $z_i = L_A^{i-1} z_1$, $i = \overline{1, r-1}$, и $L_B \eta_j = 0$, $j = \overline{1, n-r}$.

Записав соотношения (27) в эквивалентной форме, получим

$$\begin{aligned} &\operatorname{ad}_A^i B z_1 = 0, \quad i = 0, \ldots, r-2, \\ &\operatorname{ad}_A^{r-1} B z_1|_{(z,\eta)=(0,0)} \neq 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что $[1, 3]$

$$\begin{aligned} &\operatorname{ad}_A^k B(L_A^m z_1) = 0,\ k + m \leq r-2, \\ &\operatorname{ad}_A^k B(L_A^m z_1)|_{(z,\eta)=(0,0)} \neq 0,\ k + m = r-1, \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{ad}_A^k B(z_{m+1}) = 0,\ k + m \le r - 2,$$
$$\operatorname{ad}_A^k B(z_{m+1})|_{(z,\eta)=(0,0)} \ne 0,\ k + m = r - 1.$$

Последнее с учетом $L_B\eta_j = 0$, $j = \overline{1, n-r}$, означает, что

$$\Omega = \operatorname{Ann}\left(\operatorname{span}\{B, \ldots, \operatorname{ad}_A^{r-2} B\}\right) \subseteq \operatorname{span}\{\mathrm{d}z_1, \mathrm{d}\eta_1, \ldots, \mathrm{d}\eta_{n-r}\}.$$

Поскольку виртуальный выход $\phi(z,\eta)$ в точке $(0,0)$ имеет относительную степень r, то

$$\operatorname{ad}_A^i B\phi(z,\eta) = 0,\ i = \overline{0, r-2},$$

и $\mathrm{d}\phi(z,\eta) \in \Omega$. Следовательно, $\phi = \phi(z_1, \eta)$.

Заметим, что

$$L_A\phi(z_1,\eta) = \frac{\partial\phi}{\partial z_1} z_2 + \frac{\partial\phi}{\partial\eta} p(z_1,\eta) = \frac{\partial\phi}{\partial z_1} z_2 + \gamma_1(z_1,\eta),$$

откуда

$$L_A^2\phi(z_1,\eta) = \frac{\partial\phi}{\partial z_1} z_3 + \gamma_2(z_1, z_2, \eta).$$

Рассуждая аналогично, в итоге при $r > 2$ получим

$$L_A^{r-1}\phi(z_1,\eta) = \frac{\partial\phi}{\partial z_1} z_r + \gamma_{r-1}(z_1, \ldots, z_{r-1}, \eta).$$

Поскольку в точке $(0,0)$ для выхода ϕ определена относительная степень r, то

$$L_B L_A^{r-1}\phi(z_1,\eta)|_{(z,\eta)=(0,0)} \ne 0. \tag{28}$$

С учетом вида векторного поля B в координатах z, η последнее соотношение в точке $(0,0)$ примет вид

$$\frac{\partial\phi(0,0)}{\partial z_1} g(0,0) \ne 0.$$

Поскольку $g(0,0) \ne 0$ в силу того, что система (25) есть нормальная форма системы (1), то $\frac{\partial\phi(0,0)}{\partial z_1} \ne 0$.

Поскольку имеет место (28), то в окрестности точки (0,0) определена замена по части переменных, задаваемая соотношениями

$$\begin{aligned}
&\overline{z}_1 = \phi(z_1, \eta),\\
&\overline{z}_2 = L_A\phi(z_1, \eta) = \phi_2(z_1, z_2, \eta),\\
&\dots,\\
&\overline{z}_r = L_A^{r-1}\phi(z_1, \eta) = \phi_r(z_1, \dots, z_r, \eta),
\end{aligned} \tag{29}$$

Дополним (29) соотношениями

$$\overline{\eta} = \eta. \tag{30}$$

Заметим, что матрица Якоби замены (29),(30) имеет следующий вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
\frac{\partial\phi}{\partial z_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\\
* & \frac{\partial\phi}{\partial z_1} & \dots & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial\eta}\\
* & * & \dots & 0 & \vdots\\
* & * & * & \frac{\partial\phi}{\partial z_1} & \frac{\partial\phi_r}{\partial\eta}\\
\hline
 & & \mathbb{O} & & \mathbb{E}
\end{array}\right). \tag{31}$$

Поскольку первые r строк в точке (0,0) линейно независимы, то и первые r столбцов — линейно-независимы. Следовательно, эта матрица невырождена в точке $(0, 0)$, а соотношения (29),(30) определяют в окрестности точки $(0, 0)$ гладкую замену переменных.

Записав обратную замену переменных в окрестности точки $(z, \eta) = (0, 0)$ в виде

$$z_1 = \phi^{-1}(\overline{z}_1, \overline{\eta}),\ \dots, z_r = \phi_r^{-1}(\overline{z}, \overline{\eta}), \eta = \overline{\eta},$$

(где $\overline{z} = (\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_r)^{\mathrm{T}}$), находим запись системы (25) в переменных (48)

$$\begin{aligned}
&\dot{\overline{z}}_1 = \overline{z}_2, \dots, \dot{\overline{z}}_{r-1} = \overline{z}_r,\\
&\dot{\overline{z}}_r = \overline{f}(\overline{z}, \overline{\eta}) + \overline{g}(\overline{z}, \overline{\eta})u,\\
&\dot{\overline{\eta}} = p(\phi^{-1}(\overline{z}_1, \overline{\eta}), \overline{\eta}).
\end{aligned} \tag{32}$$

Система (49) является нормальной формой аффинной системы (1) с виртуальным выходом ϕ. Полагая в (49) $\overline{z}_1 = \dots = \overline{z}_r \equiv 0$, получаем систему уравнений нулевой динамики

$$\dot{\overline{\eta}} = p(\phi^{-1}(0, \overline{\eta}), \overline{\eta}),$$

положение равновесия $\overline{\eta} = 0$ которой асимптотически устойчиво. Последнее можно интерпретировать так: управление $v = \phi^{-1}(0, \eta)$ стабилизирует положение равновесия $\eta = 0$ системы (20).

Доказательство достаточности. Пусть функция $v = v(\eta)$ стабилизирует положение равновесия $\eta = 0$ системы (26). Рассмотрим для аффинной системы (1) виртуальный выход, который в переменных нормальной формы (25) имеет вид $\phi(z, \eta) = z_1 - v(\eta)$. В точке $(z, \eta) = (0, 0)$ относительная степень этого виртуального выхода равна $\rho = r$, так как $q(z, \eta) = p(z_1, \eta)$.

Соотношения

$$\begin{aligned}
&\overline{z}_1 = \phi(z, \eta) = z_1 - v(\eta), \\
&\overline{z}_2 = L_A \phi(z, \eta) = z_2 - L_A v(\eta), \\
&\ldots, \\
&\overline{z}_r = L_A^{r-1} \phi(z, \eta) = z_r - L_A^{r-1} v(\eta), \\
&\overline{\eta} = \eta,
\end{aligned} \tag{33}$$

задают в окрестности точки $(z, \eta) = (0, 0)$ замену переменных, поскольку разрешимы относительно $z_1, \ldots, z_r, \eta$, так как слагаемые $L_A^i v(\eta)$, $i = \overline{0, r-1}$, зависят только от переменных $\eta, z_1, \ldots, z_i$. В переменых (33) аффинная система (1) записывается в нормальной форме, соответствующей виртуальному выходу $\phi(z, \eta)$:

$$\begin{aligned}
&\dot{\overline{z}}_1 = \overline{z}_2, \ldots, \dot{\overline{z}}_{r-1} = \overline{z}_r, \\
&\dot{\overline{z}}_r = \overline{f}(\overline{z}, \overline{\eta}) + \overline{g}(\overline{z}, \overline{\eta}) u, \\
&\dot{\overline{\eta}} = p(\overline{z}_1 + v(\overline{\eta}), \overline{\eta}).
\end{aligned} \tag{34}$$

Полагая в (34) $\overline{z}_1 = \ldots = \overline{z}_r \equiv 0$, получаем систему уравнений нулевой динамики

$$\dot{\overline{\eta}} = p(v_1(\overline{\eta}), \overline{\eta}), \tag{35}$$

которая после замены $\overline{\eta} = \eta$ совпадает с системой (26), замкнутой стабилизирующий обратной связью $v(\eta)$. Следовательно, положение равновесия $\overline{\eta} = 0$ системы (35) асимптотически устойчиво.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что функция $\phi(z, \eta) = z_1 - v(\eta)$ в исходных переменных аффинной системы (1) записывается в виде $\phi = h(x) - v(\Psi(x))$. ►

Если в нормальной форме (25) $q(z,\eta) \equiv p(z_1, z_2, \eta)$ и положение равновесия системы нулевой динамики $\dot{\eta} = q(0,\eta)$ не является асимптотически устойчивым, то для нахождения выхода с относительной степенью $\rho = r$ в точке $(z,\eta) = (0,0)$, для которого соответствующая нулевая динамика асимптотически устойчива, можно использовать следующий результат.

Теорема 6. Если в системе (25) $q(z,\eta) \equiv p(z_1, z_2, \eta)$, а управления $v_1 = v_1(\eta)$, $v_2 = v_2(\eta)$, $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 0$, стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = p(v_1, v_2, \eta) \tag{36}$$

и удовлетворяют условиям

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_1(\eta)}{\mathrm{d}t}\right|_{\dot{\eta}=p(v_1(\eta),v_2(\eta),\eta)} = v_2(\eta), \tag{37}$$

$$1 - v_1^{'}p_{z_2}^{'}(0,0,0) \neq 0, \tag{38}$$

то система (25) с виртуальным выходом $\phi(z,\eta) = z_1 - v_1(\eta)$ имеет относительную степень r в точке $(z,\eta) = 0$, а нулевая динамика, соответствующая этому виртуальному выходу, асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$.

◀ Покажем, что система (25) с виртуальным выходом $\phi(z,\eta) = z_1 - v_1(\eta)$ имеет в точке $(z,\eta) = 0$ относительную степень r.

Заметим, что

$$L_A\phi = z_2 - v_1^{'}p(z_1, z_2, \eta),$$

откуда

$$\begin{aligned} L_A^2\phi = z_3 - v_1^{'}(p_{z_1}^{'}z_2 + p_{z_2}^{'}z_3 + p_{\eta}^{'}p(z_1,z_2,\eta)) - v_1^{''}p(z_1,z_2,\eta)) = \\ = (1 - v_1^{'}p_{z_2}^{'})z_3 + \gamma_2(z_1, z_2, \eta). \end{aligned}$$

Дифференцируя далее, при $r > 2$ в итоге получим

$$L_A^{r-1}\phi = (1 - v_1^{'}p_{z_2}^{'})z_r + \gamma_{r-1}(z_1, \ldots, z_{r-1}, \eta).$$

Поскольку $1 - v_1^{'}(0)p_{z_2}^{'}(0,0) \neq 0$, то $L_BL_A^{r-1}\phi(0,0) \neq 0$ и в точке $(0,0)$ относительная степень выхода ϕ равна r.

Из условия $1 - v_1^{'}(0)p_{z_2}^{'}(0,0) \neq 0$ с учетом полученного вида производных $L_A^i\phi(z_1,\eta)$ вытекает, что соотношения (33) задают невырожденную обратимую замену переменных в окрестности точки $(z,\eta) = (0,0)$.

Из первого соотношения в (33) получаем $z_1 = \overline{z}_1 + v_1(\overline{\eta})$. Во втором соотношении $L_A v_1(\eta)$ зависит только от переменных z_1, z_2 и η. Пусть в обратной к (33) замене переменных $z_2 = w_2(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{\eta})$.

В переменных $\overline{z}, \overline{\eta}$

$$\dot{\overline{\eta}} = p(\overline{z}_1 + v(\overline{\eta}), w_2(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{\eta}), \overline{\eta}),$$

откуда, полагая $\overline{z} = 0$, найдем уравнения нулевой динамики

$$\dot{\overline{\eta}} = p(v(\overline{\eta}), w_2(0, 0, \overline{\eta}), \overline{\eta}),$$

которое в исходных переменных запишется в виде

$$\dot{\eta} = p(v_1(\eta), w_2(0, 0, \eta)) \tag{39}$$

Поскольку $\dot{z}_1 = z_2$, то $\dot{\overline{z}}_1 + \dot{v}_1(\overline{\eta}) = w_2(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{\eta})$, что при $\overline{z} = 0$ после замены $\overline{\eta} = \eta$ дает соотношение

$$v'_{1\eta} p(v_1(\eta), w_2(0, 0, \eta), \eta) = w_2(0, 0, \eta).$$

Отсюда следует, что $w_2(0, 0, \eta) = v_2(\eta)$ в окрестности точки $\eta = 0$, поскольку обе функции равны 0 при $\eta = 0$ и являются решением уравнения

$$z_2 - v'_{1\eta} p(v_1(\eta), z_2, \eta) = 0$$

относительно z_2, а $1 - v'_1(0) p'_{z_2}(0, 0) \neq 0$.

Следовательно, уравнение (39) нулевой динамики совпадает с системой (40), замкнутой управлениями $v_1(\eta)$, $v_2(\eta)$, и поэтому нулевая динамика асимптотически устойчива в точке $\eta = 0$. ►

Отметим, что в переменных x аффинной системы (1) с выходом $y = h(x)$, имеющим относительную степень $\rho = r$ в точке $x = 0$, найденный выход имеет вид $\phi = h(x) - v_1(\Phi(x))$, где замена переменных $(z, \eta) = \Phi(x)$, $\Phi(0) = (0, 0)$, определяет преобразование системы (1) к нормальной форме (25) в окрестности точки $x = 0$.

Для построения управления, стабилизирующего положение равновесия $x = 0$ можно воспользоваться минимальной фазовостью системы (1) с выходом ϕ.

Теорема 7. Пусть в системе (25) $q(z,\eta) \equiv p(z_1, z_2, \eta)$, существует виртуальный выход $\phi(z_1, \eta), \phi(0,0) = 0$, такой, что относительная степень аффинной системы (1) с этим выходом в точке $x = 0$ будет равна r, нулевая динамика асимптотически устойчива, $\frac{\partial \phi(z_1,\eta)}{\partial z_1}(0,0) \neq 0$. Тогда найдутся функции $v_1 = v_1(\eta)$, $v_2 = v_2(\eta)$, $v_1(0) = 0$, $v_2(0) = 0$, стабилизирующие положение равновесия $\eta = 0$ системы

$$\dot{\eta} = p(v_1, v_2, \eta) \tag{40}$$

с управлениями v_1, v_2, удовлетворяющими условию

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_1(\eta)}{\mathrm{d}t}\right|_{\dot{\eta}=p(v_1(\eta),v_2(\eta),\eta)} = v_2(\eta). \tag{41}$$

◀ Поскольку в точке $(0,0)$ у выхода ϕ определена относительная степень $r > 2$, то

$$L_B L_A^{r-1} \phi(z_1, \eta)\big|_{(z,\eta)=(0,0)} \neq 0. \tag{42}$$

С учетом вида векторного поля B в координатах z, η последнее соотношение в точке $(0,0)$ примет вид

$$\left.\left(\frac{\partial \phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial p}{\partial z_2}\right) g(z,\eta)\right|_{(0,0)} \neq 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&\dot{\phi} = \tfrac{\partial \phi}{\partial z_1} z_2 + \tfrac{\partial \phi}{\partial \eta} p(z_1, z_2, \eta),\\
&\ddot{\phi} = \gamma_1(z_1, z_2, \eta) + \left(\tfrac{\partial \phi}{\partial z_1} + \tfrac{\partial \phi}{\partial \eta}\tfrac{\partial p}{\partial z_2}\right) z_3 = \gamma_1(z_1, z_2, \eta) + \beta(z_1, z_2, \eta) z_3,\\
&\ldots\\
&\phi^{(r-1)} = \gamma_{r-2}(z_1, \ldots, z_{r-1}, \eta) + \beta(z_1, z_2, \eta) z_r,\\
&\phi^{(r)} = \gamma_{r-1}(z_1, \ldots, z_r, \eta) + \beta(z_1, z_2, \eta)(f(z,\eta) + g(z,\eta)u),\\
&L_B \phi^{(r)} = L_B L_A^{r-1} \phi = \left(\tfrac{\partial \phi}{\partial z_1} + \tfrac{\partial \phi}{\partial \eta}\tfrac{\partial p}{\partial z_2}\right) g(z,\eta)
\end{aligned} \tag{43}$$

Поскольку $g(0,0) \neq 0$ в силу того, что система (25) есть нормальная форма системы (1), и справедливо неравенство (42), то

$$\left.\left(\frac{\partial \phi}{\partial z_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta}\frac{\partial p}{\partial z_2}\right)\right|_{(0,0)} \neq 0. \tag{44}$$

Поскольку имеет место (42), то согласно [3] в окрестности точки (0,0) определена замена по части переменных, задаваемая соотношениями

$$\begin{aligned}
&\overline{z}_1 = \phi(z_1, \eta),\\
&\overline{z}_2 = L_A\phi(z, \eta) = \tfrac{\partial\phi}{\partial z_1} z_2 + \tfrac{\partial\phi}{\partial\eta} p(z_1, z_2, \eta) = \phi_2(z_1, z_2, \eta),\\
&\overline{z}_3 = L_A^2\phi(z, \eta) = (\tfrac{\partial\phi}{\partial z_1} + \tfrac{\partial\phi}{\partial\eta}\tfrac{\partial p}{\partial z_2}) z_3 + \gamma_3(z_1, z_2, \eta) = \phi_2(z_1, z_2, z_3, \eta),\\
&\ldots\\
&\overline{z}_r = L_A^{r-1}\phi(z, \eta) = (\tfrac{\partial\phi}{\partial z_1} + \tfrac{\partial\phi}{\partial\eta}\tfrac{\partial p}{\partial z_2}) z_r +\\
&\qquad\qquad + \gamma_r(z_1, \ldots, z_{r-1}, \eta) = \phi_r(z_1, \ldots, z_r, \eta).
\end{aligned} \tag{45}$$

Дополним (45) соотношениями

$$\overline{\eta} = \eta. \tag{46}$$

Введем обозначение $\gamma = (\frac{\partial\phi}{\partial z_1} + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial p}{\partial z_2})$. Заметим, что матрица Якоби замены (45),(46) имеет следующий вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
\gamma & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\\
* & \gamma & \ldots & 0 & \frac{\partial\phi_2}{\partial\eta}\\
* & * & \ldots & 0 & \vdots\\
* & * & * & \gamma & \frac{\partial\phi_r}{\partial\eta}\\
\hline
 & & \mathbb{O} & & \mathbb{E}
\end{array}\right) \tag{47}$$

Поскольку первые r строк в точке $(0,0)$ линейно независимы, то и первые r столбцов — линейно-независимы. Следовательно, эта матрица невырождена в точке $(0,0)$, а соотношения (45),(46) определяют в окрестности точки $(0,0)$ гладкую инвариантную замену переменных.

Тогда в окрестности точки $(z,\eta) = (0,0)$ определена обратная замена

$$\begin{aligned}
&z_1 = \phi^{-1}(\overline{z}_1, \overline{\eta}),\\
&z_2 = \phi_2^{-1}(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{\eta}),\\
&\ldots,\\
&z_r = \phi_r^{-1}(\overline{z}, \overline{\eta}),\\
&\eta = \overline{\eta},
\end{aligned} \tag{48}$$

где $\overline{z} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_r)^{\mathrm{т}}$. Запишем систему (25) в переменных $(\overline{z}, \overline{\eta})$:

$$\begin{aligned}
&\dot{\overline{z}}_1 = \overline{z}_2, \ldots, \dot{\overline{z}}_{r-1} = \overline{z}_r,\\
&\dot{\overline{z}}_r = \overline{f}(\overline{z}, \overline{\eta}) + \overline{g}(\overline{z}, \overline{\eta})u,\\
&\dot{\overline{\eta}} = p(\phi^{-1}(\overline{z}_1, \overline{\eta}), \phi_2^{-1}(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{\eta}), \overline{\eta}).
\end{aligned} \tag{49}$$

Система (49) является нормальной формой аффинной системы (1) с виртуальным выходом ϕ. Полагая в (49) $\overline{z}_1 = \ldots = \overline{z}_r \equiv 0$, получаем систему уравнений нулевой динамики

$$\dot{\overline{\eta}} = p(\phi^{-1}(0, \overline{\eta}), \phi_2^{-1}(0, 0, \overline{\eta}), \overline{\eta}),$$

положение равновесия $\overline{\eta} = 0$ которой асимптотически устойчиво. Последнее можно интерпретировать так: управления

$$v_1 = \phi^{-1}(\overline{z}_1, \eta)|_{\overline{z}_1=0}, \quad v_2 = \omega(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \overline{\eta})|_{\overline{z}_1=0, \overline{z}_2=0}$$

стабилизируют положение равновесия $\eta = 0$ системы (40).

Поскольку $z_2 = \dot{z}_1$, а $v_2 = z_2|_{\overline{z}_1=0, \overline{z}_2=0}$, то $v_1(\eta)$ и $v_2(\eta)$ связаны соотношением (41). ►

Пример. Рассмотрим аффинную систему, записанную в нормальной форме, соответствующую выходу, относительная степень которого равна 3.

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= f(z, \eta) + g(z, \eta)u, \\ \dot{\eta} &= \eta + z_1 + z_2, \\ y &= z_1 \end{aligned} \tag{50}$$

Нулевая динамика $\dot{\eta} = \eta$ данной системы не является устойчивой. Воспользуемся теоремой 6 для получения нового выхода, которому соответствует нормальная форма с асимптотически устойчивой нулевой динамикой.

Подставим в последнее уравнение вместо z_1, z_2 управления $v_1(\eta)$, $v_2(\eta)$:

$$\dot{\eta} = \eta + v_1(\eta) + v_2(\eta). \tag{51}$$

Условие

$$\left.\frac{\mathrm{d}v_1(\eta)}{\mathrm{d}t}\right|_{\dot{\eta}=p(v_1(\eta), v_2(\eta), \eta)} = v_2(\eta). \tag{52}$$

имеет вид

$$\dot{v}_1(\eta) = \frac{\partial v_1}{\partial \eta}(\eta + v_1(\eta) + v_2(\eta)) = v_2(\eta).$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \eta} + \frac{\partial v_1}{\partial \eta} v_1 = v_2(1 - \frac{\partial v_1}{\partial \eta}).$$

Отсюда получим

$$v_2 = \frac{\frac{\partial v_1}{\partial \eta}(\eta + v_1)}{1 - \frac{\partial v_1}{\partial \eta}}. \tag{53}$$

Подставив (53) в (51), найдем

$$\dot{\eta} = \eta + v_1(\eta) + \frac{\frac{\partial v_1}{\partial \eta}(\eta + v_1)}{1 - \frac{\partial v_1}{\partial \eta}}. \tag{54}$$

Выберем $v_1 = -k\eta, k > 0$. Тогда

$$\dot{\eta} = \eta - k\eta - \frac{k}{k+1}\eta + \frac{k^2}{1+k}\eta = (1 - k - \frac{k}{1+k} + \frac{k^2}{1+k})\eta.$$

Чтобы нулевое положение равновесия этой системы было асимптотически устойчиво, коэффициент при η должен быть меньше нуля, то есть

$$\frac{(1-k)(1+k) - k + k^2}{(1+k)} = \frac{1 - k^2 - k + k^2}{1+k} = \frac{1-k}{1+k} < 0.$$

Это условие выполняется при $k > 1$.

Положим $k = 2$, тогда

$$v_1 = -2\eta.$$

$$\dot{v}_1 = -2(\eta - 2\eta + v_2).$$

В итоге

$$-2(\eta - 2\eta + v_2) = v_2,$$

откуда

$$v_2 = \frac{2}{3}\eta.$$

Возьмем в качестве нового выхода $\overline{z}_1 = z_1 + 2\eta$. Тогда

$$\overline{z}_2 = \dot{\overline{z}}_1 = 2z_1 + 3z_2 + 2\eta.$$

Положим $\overline{\eta} = \eta$. В новых переменных система примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{\overline{z}}_1 = \overline{z}_2,\\
&\dot{\overline{z}}_2 = \overline{z}_3,\\
&\dot{\overline{z}}_3 = \overline{f}(\overline{z}, \overline{\eta}) + \overline{g}(\overline{z}, \overline{\eta})u,\\
&\dot{\overline{\eta}} = \overline{z}_1 - 2\overline{\eta} + \tfrac{1}{3}(\overline{z}_2 - 2\overline{z}_1 + 2\overline{\eta}) + \overline{\eta} =\\
&= \tfrac{1}{3}(\overline{z}_1 + \overline{z}_2 - \overline{\eta}).
\end{aligned} \tag{55}$$

Ее нулевая динамика

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{3}\eta \qquad (56)$$

является асимптотически устойчивой.

Заключение

Поиск виртуального выхода, которому соответствует асимптотически устойчивая нулевая динамика, по-существу является поиском такого многообразия в пространстве переменных состояния системы, при движении по которому траектории динамической системы, замкнутой соответствующим управление, стремятся к положению равновесия. Управление здесь используется только для удержания траектории системы в достаточно малой окрестности указанного многообразия.

Такое управление может быть предпочтительнее управления, полученного с использованием полной линеаризации динамической системы с управлением, поскольку базируется на внутренних свойствах системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 12-07-00329, гранта РФФИ 10-07-00617, Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4144.2010.1) и федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 - 2013 годы (соглашение № 14.B37.21.0370)

Список литературы

1. Isidori A. Nonlinear control systems. London: Springer-Verlag, 1995. 587 p.
2. Ким Д.П. Теория автоматического управления. В 2-х томах. Многомерные, нелинейные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. Т.2. 464 с.
3. Крищенко А.П. Преобразование нелинейных систем и стабилизация программных движений // Труды МВТУ им. Н.Э. Баумана. 1988. № 512. С. 69 – 87.
4. Крищенко А.П., Клинковский М.Г. Преобразование аффинных систем с управлением и задача стабилизации. // Дифференциальные уравнения. 1992. № 1. Т.28. С. 1945 – 1952.

5. Крищенко А.П., Панфилов Д.Ю., Ткачев С.Б. Построение минимально фазовых аффинных систем // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 11. С. 1483 – 1489.
6. Output maps with associated asymptotically stable zero dynamics / A.P. Krishchenko, D.U. Panfilov, K.E. Starkov, S.B. Tkachev // Nonlinear Control Systems'04: Proc. of VI IFAC Symp. Stuttgart, 2004. V. 1. P. 329 – 334.
7. Ткачев С.Б. Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем с использованием линеаризации по части переменных/ Ткачев С.Б. // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электронный журнал. 2011. №11 Режим доступа: http://technomag.edu.ru/doc/255087.html (дата обращения: 01.08.2012)

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Stabilization of affine systems with high transformability index to a quasicanonical form

09, September 2012

DOI: 10.7463/0912.0467824

Tkachev S. B., Shevliakov A. A.

Russia, Bauman Moscow State Technical University

mathmod@bmstu.ru

For nonlinear dynamical systems with scalar control the equilibrium point stabilization problem is considered using a transformation of the system in a regular quasicanonical form. Affine systems are investigated which can be transformed to quasicanonical form with transformability index greater then two, and zero dynamics of affine systems are not asymptotically stable. The virtual outputs method of stabilizing feedback design is propagated on the above mentioned systems.

References

1. Isidori A. *Nonlinear control systems*. London: Springer-Verlag, 1995. 587 p.
2. Kim D.P. Teoriia avtomaticheskogo upravleniia. V 2 t. T. 2. *Mnogomernye, nelineinye i adaptivnye sistemy* [The theory of automatic control. In 2 vols. Vol. 2. Multi-dimensional, nonlinear and adaptive systems]. Moscow, FIZMATLIT, 2004. 464 p.
3. Krishchenko A.P. Preobrazovanie nelineinykh sistem i stabilizatsiia programmnykh dvizhenii [The transformation of nonlinear systems and stabilization of programmed motions]. *Trudy MVTU im. N.E. Baumana* [Proc. of the Bauman MSTU], 1988, no. 512, pp. 69–87.
4. Krishchenko A.P., Klinkovskii M.G. Preobrazovanie affinnykh sistem s upravleniem i zadacha stabilizatsii [The transformation of affine systems with control

and stabilization problem]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 1992, vol. 28, no. 1, pp. 1945–1952.

5. Krishchenko A.P., Panfilov D.Iu., Tkachev S.B. Postroenie minimal'no fazovykh affinnykh sistem [Construction of minimum phase affine systems]. *Differentsial'nye uravneniia* [Differential equations], 2002, vol. 38, no. 11, pp. 1483–1489.
6. Output maps with associated asymptotically stable zero dynamics / A.P. Krishchenko, D.U. Panfilov, K.E. Starkov, S.B. Tkachev // *Proc. of 6th IFAC Symp. on Nonlinear Control Systems'04* Stuttgart, 2004, vol. 1, pp. 329 – 334.
7. Tkachev S.B. Stabilizatsiia neminimal'no fazovykh affinnykh sistem s ispol'zovaniem linearizatsii po chasti peremennykh [Stabilization of non-minimal phase affine systems with linearization of the part of varibles]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2011, no. 11. Available at: http://technomag.edu.ru/doc/255087.html, accessed 01.08.2012.