

Моделирование электрических цепей синусоидального тока с использованием дифференциально-комплексных преобразований

77-48211/490595

10, октябрь 2012

Масленникова С. И., Степанов А. В.

УДК [621.31:63]+631.001.57

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

enin@bmstu.ru

При больших возмущениях в электрических цепях синусоидального тока (КЗ, включение источников, отключение нагрузки и т. д.) возникают переходные электромагнитные процессы, которые могут приводить к авариям и нарушению функционирования электротехнических систем. При этом исследование переходных электромагнитных процессов целесообразно проводить с использованием методов математического моделирования. Поэтому актуальным является разработка и совершенствование методов моделирования электрических цепей синусоидального тока при воздействии различных возмущающих воздействий. Для моделирования установившихся режимов электрических цепей синусоидального тока широко используется комплексный метод. Методы численного интегрирования переходных процессов в электрических цепях синусоидального тока недостаточно эффективны и требуют больших вычислительных затрат, поскольку производят расчет мгновенных значений синусоидальных токов и напряжений.

В работах [2-4] предложен дифференциально-комплексный метод моделирования основанный на отображении функций действительного переменного в комплексную область. В этом случае процессы представляются двумя функциями: функцией амплитуды и функцией фазы. При вычислениях используется метод дифференциальных преобразований [1] позволяющий отображения в комплексную область и обратный переход производить с использованием спектральной модели системы. При моделировании установившихся режимов в электрических цепях синусоидального тока дифференциально-комплексный метод является некоторой модификацией комплексного метода, но также позволяет моделировать и переходные процессы.

1. Дифференциально-комплексные преобразования (ДКП)

Ток и напряжение в электрической цепи синусоидального тока, функции действительного аргумента $x(t)$, $t \in [0, t_n]$ отображается в комплексную область при помощи дифференциально-комплексного оператора

$$L = \left(1 + j \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}\right), \quad \text{где } j = \sqrt{-1}, \quad (1)$$

где ω – угловая частота синусоидальных источников.

Тогда
$$Lx(t) = \left(1 + j \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt}\right)x(t) = x(t) + j \frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt}.$$

Обозначим
$$\underline{x}(t) = Lx(t) = x(t) + j \frac{1}{\omega} \frac{dx}{dt}. \quad (2)$$

При расчете установившихся режимов синусоидальных электрических цепей токи и напряжения представляются комплекснозначными функциями. Синусоидальная величина $x(t) = X_m \sin(\omega t + \psi)$,

представляется комплексной функцией

$$\underline{X}_c(t) = X_m e^{j\psi} e^{j\omega t},$$

где $\underline{X}_c = X_m e^{j\psi}$ называется комплексной амплитудой. Мнимая часть комплекснозначной функции $\underline{X}_c(t)$ описывает синусоидальную величину.

Применяя дифференциально-комплексное преобразование (1), (2) к синусоидальной функции $x(t)$ получаем

$$\underline{X}(t) = X_m \sin(\omega t + \psi) + j X_m \cos(\omega t + \psi). \quad (3)$$

В экспоненциальной форме выражение (3) имеет вид

$$\underline{X}(t) = X_m e^{j\beta(t)},$$

где
$$\beta(t) = \operatorname{arctg} \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\sin(\omega t + \psi)},$$

учитывая, что
$$\operatorname{arctg} \frac{\cos(\omega t + \psi)}{\sin(\omega t + \psi)} = \frac{\pi}{2} - \omega t - \psi,$$

запишем

$$\underline{X}(t) = X_m e^{j(\frac{\pi}{2} - \omega t - \psi)} = X_m e^{j(\frac{\pi}{2} - \psi)} e^{-j\omega t}.$$

Величину
$$\underline{X} = X_m e^{j(\frac{\pi}{2} - \psi)}, \quad (4)$$

назовем комплексной амплитудой в ДКП. При использовании дифференциально-комплексного метода вычисляется комплексная амплитуда

$$\underline{X} = \alpha + j\beta,$$

затем восстановление синусоидального процесса $x(t) = X_m \sin(\omega t + \psi)$ производят по выражениям

$$X_m = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Следовательно, комплексы синусоидальных процессов для дифференциально-комплексного и комплексного методов отличаются. Синусоидальные величины и их комплексы могут быть представлены векторами на комплексной плоскости. Для синусоидальной величины, как это было показано выше, изображение по комплексному методу равно $\underline{X}_c = X_m e^{j\psi}$, а по дифференциально-комплексному методу (4) $\underline{X} = X_m e^{j(\frac{\pi}{2} - \psi)}$. Векторное представление комплексов \underline{X}_c и \underline{X} приведено на рис. 1.

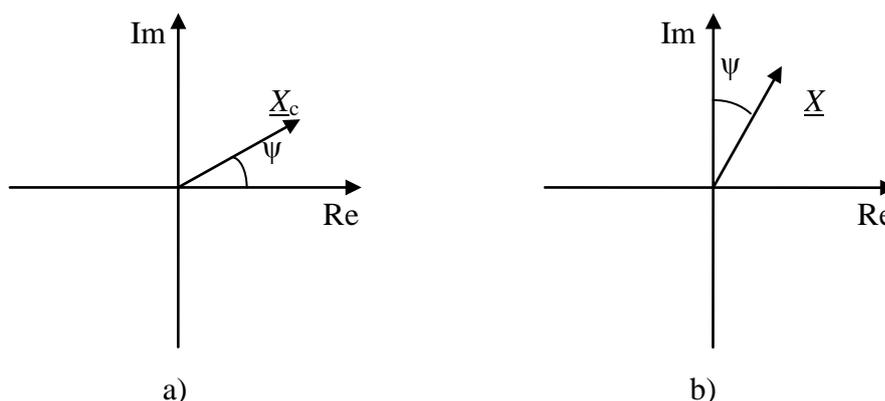


Рис. 1. Комплексное представление синусоидальных величин: а) по комплексному методу; б) по дифференциально-комплексному методу.

Следует отметить, что вектор изображающий синусоидальную величину для дифференциально-комплексного метода вращается по часовой стрелке, а по комплексному методу против часовой стрелки.

В общем случае функция $\underline{x}(t)$ может быть представлена в экспоненциальной форме

$$\underline{x}(t) = \alpha(t) \exp(j\beta(t)), \quad (5)$$

где

$$\alpha(t) = \sqrt{x^2(t) + \left(\frac{1}{\omega} x'(t)\right)^2},$$

$$\beta(t) = \text{arc tg} \left(\frac{x'(t)}{\omega x(t)} \right),$$

Обозначим

$$\underline{y}(t) = \ln(\alpha(t) \exp(j\beta(t))) = \ln(\alpha(t)) + j\beta(t),$$

тогда обратный переход от комплекснозначной функции $\underline{y}(t)$ (изображения) к действительной функции $x(t)$ (оригиналу) производится по формуле

$$x(t) = \text{Real}(\exp(\underline{y}(t))). \quad (6)$$

Выражение (6) для представления (5) назовем обратным дифференциально-комплексным преобразованием.

При $t = 0$ функция $\underline{x}(t)$ соответственно равна $\underline{x}(0) = x(0) + j(x'(0)/\omega)$. Тогда запишем

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(0) \exp(\underline{y}(t)). \quad (7)$$

Функция $\underline{y}(t)$ в этом случае определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= \ln(\underline{x}(t)/\underline{x}(0)) = \ln(\underline{x}(t)) - \ln(\underline{x}(0)) = \\ &= \ln(|\underline{x}(t)|) - \ln(|\underline{x}(0)|) + j \{ \text{Arg}(\underline{x}(t)) - \text{Arg}(\underline{x}(0)) \}. \end{aligned}$$

Действительная и мнимая часть функции $\underline{y}(t)$ для представления (7) при $t=0$ равны нулю. Обратный переход с использованием представления (7) от функции $\underline{y}(t)$ к функции $x(t)$ производится по выражению

$$x(t) = \{ x(0)\cos(y_I(t)) - (x'(0)/\omega)\sin(y_I(t)) \} \exp(y_R(t)), \quad (8)$$

где

$$y_R(t) = \text{Real}(\underline{y}(t)), \quad y_I(t) = \text{Im}(\underline{y}(t)).$$

Для восстановления производной функции $x(t)$ получим следующую формулу

$$x'(t) = \{ x(0)\sin(y_I(t)) + (x'(0)/\omega)\cos(y_I(t)) \} \exp(y_R(t)). \quad (9)$$

Обратный переход к функции $x(t)$ можно производить не только по выражению (8), а используя изображение производной функции

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(\tau) d\tau.$$

Тогда используя (9) получаем

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \left\{ x(0)\sin(y_I(\tau)) + (x'(0)/\omega)\cos(y_I(\tau)) \right\} \exp(y_R(\tau)) d\tau \quad (10)$$

В некоторых случаях интеграл (10) берется аналитически.

Рассмотрим случай, когда $\underline{y}(t)$ – линейная функция

$$\underline{y}(t) = (a + jb)t,$$

$$a = \text{Real}(\underline{Y}(1)/H),$$

$$b = \text{Imag}(\underline{Y}(1)/H).$$

Тогда после несложных преобразований получаем

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{a^2 + b^2} \{ (r_1 \cos bt + r_2 \sin bt) e^{at} - r_1 \}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= a(x'(0)/\omega) - bx(0), \\ r_2 &= ax(0) - b(x'(0)/\omega). \end{aligned}$$

Выражение (11) может использоваться для вычисления приближенного значения функции $x(t)$.

2. Спектральные формы дифференциально-комплексных преобразований

Практическое использование дифференциально-комплексных преобразований на основе выражений (1, 2, 7, 8, 9) при моделировании переходных процессов может приводить к слишком сложным аналитическим вычислениям. Применение метода дифференциально-комплексных преобразований существенно упрощается, заменой операций над функциями операциями над их спектрами [1]. Этот переход к операциям над спектрами позволяет практически с любой требуемой точностью осуществлять прямое и обратное дифференциально-комплексные преобразования. Переход от функции $x(t)$ к дифференциальным спектрам производится на основе преобразования [1]

$$X(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k x}{dt^k} \right]_{t=0}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где H – шаг расчета, k – принимает целочисленные значения.

Задаваясь дифференциальным спектром функции $x(t)$, полученным из спектральной модели системы, можно вычислить дифференциально-комплексный спектр функции $\underline{x}(t)$, а затем по спектру функции $\underline{x}(t)$ определить и спектр функции $\underline{y}(t)$. Выражения, позволяющие по спектру функции $x(t)$ вычислить спектры функций $\underline{x}(t)$ и $\underline{y}(t)$, а также по спектрам восстановить функцию $x(t)$ будем называть спектральными формами дифференциально-комплексных преобразований. Пусть с использованием спектральной модели вычислен дифференциальный спектр функции $x(t)$, обозначим его $X(k)$, $k=0,1,2, \dots$. Дифференциальный спектр комплексной функции $\underline{x}(t)$ называемый в дальнейшем дифференциально-комплексным спектром, может быть получен по следующему выражению

$$\underline{X}(k) = X(k) + j((k+1)/(\omega H))X(k+1).$$

Дифференциальный спектр функции $\underline{X}(k)$, представляет собой ряд комплексных чисел. По дифференциально-комплексному спектру функция $\underline{x}(t)$ восстанавливается по

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{X}(k) (t/H)^k, \quad (12)$$

или если дифференциальный спектр функции $x(t)$ вычислен с помощью спектральной модели не в точке $t = 0$, а в точке $t = t_i$

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{X}_i(k) \left(\frac{t - t_i}{H} \right)^k. \quad (13)$$

Выражения (12) и (13) могут быть представлены в виде суммы действительной и комплексной составляющей

$$\underline{x}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k) \left(\frac{t - t_i}{H} \right)^k + j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{\omega H} X_i(k+1) \left(\frac{t - t_i}{H} \right)^k. \quad (14)$$

Получим дифференциальный спектр функции $y(t)$ в случае, если дифференциальный спектр функции $X(k)$ известен. Запишем

$$\underline{x}(t) = \exp(y(t)). \quad (15)$$

Дифференцируя выражение (15), получаем

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = e^{y(t)} \frac{dy(t)}{dt} = \underline{x}(t) \frac{dy(t)}{dt}. \quad (16)$$

Переводя (16) в область изображений, имеем

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{H} \underline{X}(k+1) &= \frac{k+1}{H} \underline{X}(0) \underline{Y}(k+1) + \\ &+ \left\{ \sum_{l=0}^{k-1} \frac{l+1}{H} \underline{Y}(l+1) \underline{X}(k-l) \right\} (1 - \mathfrak{b}(k)), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\mathfrak{b}(k) = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 0 & \text{при } k \neq 0. \end{cases}$$

В формуле (17) дифференциально-комплексный спектр функции $\underline{x}(t)$ предполагается известным, а неизвестным является спектр функции $y(t)$.

Тогда можно записать

$$\frac{k+1}{H} \underline{X}(0) \underline{Y}(k+1) = \frac{k+1}{H} \underline{X}(k+1) - \left\{ \sum_{l=0}^{k-1} \frac{l+1}{H} \underline{Y}(l+1) \underline{X}(k-l) \right\} (1 - \mathfrak{b}(k)) \quad (18)$$

или

$$\underline{Y}(k+1) = \frac{1}{\underline{X}(0)} \left[\underline{X}(k+1) - \left\{ \sum_{l=0}^{k-1} \frac{l+1}{k+1} \underline{Y}(l+1) \underline{X}(k-l) \right\} (1 - \mathfrak{b}(k)) \right]. \quad (19)$$

Выражение (18, 19) позволяет рекуррентно, задавая дифференциальным спектром $\underline{X}(k)$ (14) вычислить дифференциальный спектр функции $\underline{Y}(k)$. Нулевая дискрета при вычислениях по формуле (18) равна

$$\underline{Y}(0) = \frac{1}{2} \ln(X^2(0) + (X(1)/\omega H)^2) + j \text{Arctg}(X(1)/(\omega H X(0))). \quad (20)$$

Вычисляя нулевую дискрету по выражению (20) тем самым определяем для каждой комплексной кривой $\underline{y}(t)$ соответствующий элемент многолистной функции.

Переход к спектрам функций $y_R(t)$, $y_I(t)$ может позволить увеличить скорость сходимости ряда аппроксимирующего колебательные процессы.

При переходе от дифференциально-комплексных спектров (изображений) к оригиналам не всегда удается с достаточной точностью восстановить искомую функцию на большом интервале вследствие не сходимости либо плохой сходимости ряда Тейлора.

В работе [1] при восстановлении функции по дифференциальным спектрам (обратном преобразовании) используется метод припасовывания, который позволяет от дифференциального спектра в одной точке перейти к дифференциальному спектру в другой точке и наоборот. Это дает возможность, восстановив функцию на одном интервале, перейти к восстановлению функции на другом интервале.

Пусть на некотором интервале $t \in [0, T]$ необходимо восстановить функцию $x(t)$ по ее дифференциальному спектру, заданному в точке $t = 0$. Разобьем этот интервал на подинтервалы с некоторым фиксированным шагом H

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_N = T,$$

где

$$t_i = iH, i = 0, 1, 2, \dots, N, N = T/H.$$

Как показано [1] дифференциальные спектры функции $x(t)$ в точках t_i и t_{i+1} связаны между собой. Это позволяет по дифференциальному спектру в точке t_i вычислить дифференциальный спектр в точке t_{i+1} либо наоборот. Задавая дифференциальный спектр функции $x(t)$ в точке $t_0=0$ и используя связь между дифференциальными спектрами, можно последовательно вычислить дифференциальные спектры, в точках t_1, t_2, \dots, t_N и по спектрам восстановить $x(t)$ во всем интервале $[0, T]$.

Для дифференциально-комплексных спектров связь между спектрами в различных точках имеет следующий вид

$$\underline{X}_{i+1}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)\dots(l+k)}{k!} \underline{X}_i(l+k), \quad (21)$$

$$\underline{X}_i(k) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l+1)(l+2)\dots(l+k)}{k!} \underline{X}_{i+1}(l+k), \quad (22)$$

$$k=0, 1, 2, 3, \dots$$

или используя (1) и (21), (22) получаем

$$\underline{X}_{i+1}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)\dots(l+k)}{k!} \left[\underline{X}_i(l+k) + j \frac{(l+k+1)}{\omega H} \underline{X}_i(l+k+1) \right], \quad (23)$$

$$\underline{X}_i(k) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l+1)(l+2)\dots(l+k)}{k!} \left[\underline{X}_{i+1}(l+k) + j \frac{(l+k+1)}{\omega H} \underline{X}_{i+1}(l+k+1) \right], \quad (24)$$

$$k=0, 1, 2, 3, \dots$$

Соотношения (21) – (24) позволяют переходить от дифференциального-спектра функции $x(t)$ в точке t_i (t_{i+1}) к дифференциально-комплексному спектру $\underline{X}_{i+1}(k)$. Подобные соотношения связывают дифференциально-комплексные спектры функции $y(t)$ в точках t_i и t_{i+1}

$$\underline{Y}_{i+1}(k) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)(l+2)\dots(l+k)}{k!} \underline{Y}_i(l+k), \quad (25)$$

$$\underline{Y}_i(k) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{(l+1)(l+2)\dots(l+k)}{k!} \underline{Y}_{i+1}(l+k), \quad (26)$$

$$k=0, 1, 2, 3, \dots$$

Дифференциально-комплексные спектры функции $x(t)$, $y(t)$ в точке t_i связаны соотношением

$$\underline{Y}_i(k+1) = \frac{1}{\underline{X}_i(0)} \left\{ \underline{X}_i(k+1) - \left[\sum_{l=1}^{k+1} \frac{l+1}{k+1} \underline{X}_i(k-l) \underline{Y}_i(l+1) \right] (1 - \mathfrak{v}(k)) \right\}, \quad (27)$$

$$\underline{X}_i(k+1) = \sum_{l=0}^k \frac{l+1}{k+1} \underline{X}_i(k-l) \underline{Y}_i(l+1), \quad (28)$$

$$k=0, 1, 2, 3, \dots$$

позволяющими от спектра $X_i(k)$, $k=0, 1, 2, \dots$ по формуле (27, 28) вычислить спектр $\underline{Y}_i(k)$. Используя (25) по спектру $\underline{Y}_i(k)$, $k=0, 1, 2, \dots$ вычисляем нулевую дискрету функции $y(t)$ в точке t_{i+1}

$$\underline{Y}_{i+1}(0) = y(t_{i+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \underline{Y}_i(k). \quad (29)$$

Используя (29) значение $X_{i+1}(0)$ определяем на основе выражения (8). Тогда функцию $x(t)$ в точке t_{i+1} вычисляем по выражению

$$x(t_{i+1}) = \left\{ X_i(0) \cos(Y_{i+1}^I(0) - \frac{k+1}{\omega H} X_i(1) \sin(Y_{i+1}^I(0))) \right\} \exp(Y_{i+1}^R(0)), \quad (30)$$

где

$$Y_{i+1}^R(0) = \text{Real}(Y_{i+1}(0)),$$

$$Y_{i+1}^I(0) = \text{Im}(Y_{i+1}(0)).$$

При практических вычислениях ограничиваются некоторым числом учитываемых дискрет исходя из требуемой точности.

При расчете электрических цепей синусоидального тока используется метод переменных состояния, система уравнений которых имеют следующий вид

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (31)$$

где X – вектор переменных состояния, включающий напряжения емкостных элементов и токи индуктивных элементов;

U – вектор, включающий синусоидальные источники напряжения и тока;

A, B – постоянные действительные матрицы, A – квадратная матрица размера вектора переменных состояния.

Переводя систему (31) в область дифференциальных изображений получаем

$$\frac{k+1}{H} X(k+1) = AX(k+1) + BU(k+1), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

Система (32) позволяет рекуррентно вычислять дифференциальные спектры переменных состояния в некоторый момент времени t_i , затем вычисляются дифференциально-комплексные спектры. По дифференциально-комплексным спектрам используя обратное преобразование (30) вычисляется решение в точке t_{i+1} . Задавая решение в точке $t = 0$, расчет переходного процесса производится путем последовательного вычисления решения в точках $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ на всем требуемом интервале расчета.

Проводилось сравнение метода дифференциально-комплексных преобразований с методом Рунге-Кутты. В качестве тестовой задачи производился расчет электрической цепи синусоидального тока при возмущении в виде короткого замыкания на шинах синхронного генератора [4]. Предлагаемый метод обеспечил более высокую точность, погрешность в конечной точке расчета равна $\varepsilon \approx 9\%$ при расчете по методу Рунге-Кутты и

$\varepsilon \approx 1,5\%$ при расчете дифференциально-комплексным методом. Таким образом, применение дифференциально-комплексного метода позволит сократить вычислительные затраты при моделировании переходных процессов в электрических цепях синусоидального тока в случае больших возмущений: КЗ, отключение или включение источников. Еще одним достоинством дифференциально-комплексного метода является возможность моделировать на основе единого подхода, как переходных, так и установившихся режимов электрических цепей синусоидального тока.

Список литературы

1. Пухов Г.Е. Дифференциальные спектры и модели. Киев: Наук. думка, 1990.184 с.
2. Степанов А.В. Восстановление динамических процессов в комплексной области по дифференциальным спектрам// Электрон. Моделирование, 1992. Т. 14. № 5. С. 18-19
3. Степанов А.В. Дифференциально-комплексные преобразования и моделирование сложных динамических процессов// Электрон. Моделирование. 1993. Т. 15. № 1. С. 14-19
4. Степанов А.В. Дифференциальные, дифференциально-комплексные преобразования и анализ сложных электротехнических систем. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. – 168 с.