

Определение области разброса фазовых координат механической системы 77-48211/453448

Инженерный вестник # 10, октябрь 2012

Беляев А. В., Тушев О. Н.

УДК 629.7.017

Россия, МГТУ им. Н.Э. Баумана

beliaev@bmstu.ru

Излагается метод, основанный на представлении фазовых координат системы в виде ряда по случайным вариациям параметров. Строится инженерная методика для определения либо границ области, в которую попадают с заданной вероятностью реализации исследуемой фазовой координаты, либо вероятности попадания этой координаты в заданный допуск. Разработан способ выявления влияния разброса каждого в отдельности параметра на динамическую ошибку системы.

Рассмотрим механическую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X, A, t), \\ X(t_0) &= X_0\end{aligned}\tag{1}$$

где X - n -мерный вектор фазовых координат; F - n -мерная векторная функция; A - вектор случайных параметров; t - время.

Задача может формулироваться двояко: определение границ области, в которую с заданной вероятностью попадают реализации исследуемой фазовой координаты или вычисление вероятности попадания реализаций в заданный допуск.

Распространенным подходом к решению такого рода задач является разложение фазовых координат в степенной ряд по случайным вариациям с центром разложения, соответствующим номинальным значениям параметров. Для случая нелинейных систем можно воспользоваться известными приемами теории чувствительности [1].

Будем считать, что такое разложение получено. Тогда путем осреднения как самих фазовых координат (или ошибок $\Delta = x - x_N$, где x_N - номинальное решение), так и их степеней, несложно выразить моменты различных порядков в виде явных зависимостей от вероятностных характеристик параметров системы.

Для весьма распространенного на практике случая нормальности закона распределения параметров и их независимости получаются формулы полиномиального вида от дисперсии. Например, для математического ожидания ошибки имеем

$$M[\Delta] = \sum_{i=1}^m a_i(t) D_i + \sum_{i=1, j \geq i}^m b_{ij}(t) D_i D_j + \dots, \quad (2)$$

где m - количество параметров, допусковый разброс которых необходимо учесть при анализе точности; D_i - дисперсии параметров. Вычисление коэффициентов a_i, b_{ij} и т.д. принципиальных сложностей не имеет.

В дальнейшем ограничиваемся определением четырех характеристик - M, D, γ_1, γ_2 (M - математическое ожидание; D - дисперсия; $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ - асимметрия; $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ - эксцесс).

Для практических задач, рассмотренных в [2], важно получить границы области, в которую с заданной вероятностью попадают реализации исследуемой фазовой координаты. Задача в такой постановке достаточно просто решается только в случае нормального закона распределения, когда удается в долях среднего квадратического отклонения задать координаты границ такой области (например, правило « 3σ » обеспечивает вероятность 0,9973). Для произвольного закона распределения решение поставленной задачи в современных публикациях отсутствует.

Получим границы указанной области для законов распределения более общего вида. Для этого используем разложение произвольной функции распределения в ряд Грама-Шарлье [3], ограничиваясь тремя членами. Тогда

$$f(\bar{x}) = \Phi'(\bar{x}) - \frac{\gamma_1}{3!} \Phi^{IV}(\bar{x}) + \frac{\gamma_2}{4!} \Phi^V(\bar{x}), \quad (3)$$

где $\Phi(\bar{x})$ - нормальная функция распределения, $\bar{x} = \frac{x - M_x}{\sigma_x}$ - безразмерная координата.

Добьемся того, чтобы интеграл от (3) в пределах K_1, K_2 обеспечивал вероятность P попадания в интервал (K_1, K_2) . Тогда

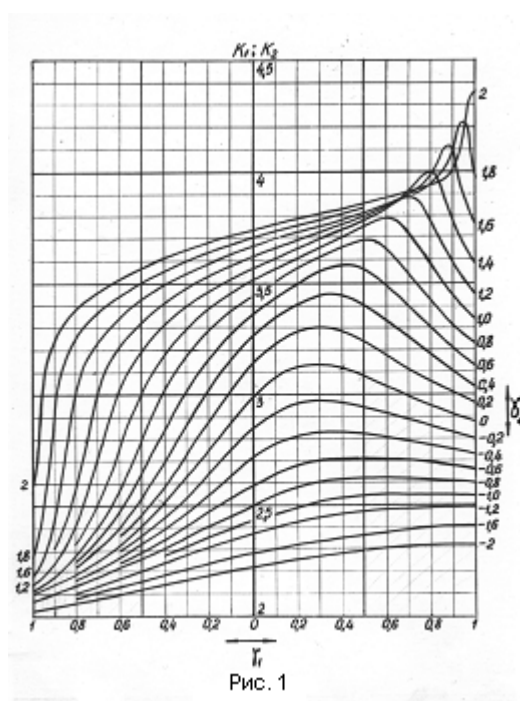
$$P = \int_{-K_1}^{K_2} [\Phi'(\bar{x}) - \frac{\gamma_1}{3!} \Phi^{IV}(\bar{x}) + \frac{\gamma_2}{4!} \Phi^V(\bar{x})] d\bar{x}. \quad (4)$$

Таким образом, получено уравнение для нахождения границ области (K_1, K_2) , в котором, в зависимости от конкретных условий, можно задать любое численное значение вероятности P . Рассмотрим, например, $P = 0,9973$, т. е. то же самое значение вероятности, что и для правила « 3σ » в случае нормального закона распределения.

Для того чтобы определение K_1 и K_2 из (4) стало корректным, необходимо наложить еще одно условие на границы области. Из практических соображений целесообразно вычислять K_1, K_2 при условии — минимума интервала (K_1, K_2) . Для удовлетворения этого требования использовался следующий алгоритм, реализованный на ЭВМ. Интервал интегрирования функции плотности вероятности (3) разбивался на равные элементарные участки. Суммирование осуществлялось последовательно по шагам, причем на каждом шаге выбиралась та элементарная площадка из оставшихся, на

которой достигался максимум плотности вероятности. Таким образом, выбирая на каждом шаге элементарную площадку с максимальной площадью, обеспечиваем минимум шагов для достижения заданной суммарной вероятности, что соответствует требованию минимума интервала (K_1, K_2) . Процесс суммирования заканчивался, когда общая площадь становилась равной 0,9973.

В результате проведенных расчетов была построена номограмма (рис. 1). По вертикальной оси отложены значения K_1, K_2 , по горизонтальной — асимметрия. Каждая кривая соответствует определенному значению эксцесса. Номограммой нужно пользоваться, придерживаясь следующего правила. Выбрать из семейства кривую, соответствующую конкретному γ_2 . Если $\gamma_1 > 0$, то справа от вертикальной оси при пересечении выбранной кривой с координатной линией, соответствующей $|\gamma_1|$, получим K_2 , слева от оси для того же $|\gamma_1|$ получим K_1 . Для случая $\gamma_1 < 0$ границы меняются местами.



Определив K_1 и K_2 и приняв за начало отсчета номинальное решение, запишем верхнюю и нижнюю границы области в любой момент времени в виде

$$\begin{aligned} x_B &= M_{\Delta} + \sigma_{\Delta} K_2, \\ x_H &= M_{\Delta} - \sigma_{\Delta} K_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Из рис. 1 видно, что правило « 3σ » получается как частный случай при $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$, что соответствует нормальному закону распределения.

Очевидно, что при очень сильном отличии закона распределения от нормального (большие по абсолютной величине γ_1 и γ_2) предлагаемая методика окажется непригодной, поскольку потребуются учет большего числа членов ряда Грама-Шарлье, а следовательно, и вычисление более высоких моментов. Принятые для данной

номограммы пределы изменения γ_1 и γ_2 ($|\gamma_1| \leq 1; |\gamma_2| \leq 2$) проверялись на конкретных законах распределения, имеющих точную аналитическую запись. При этом ошибка определения границ области с помощью номограммы по отношению к точно вычисленным границам не превышала 5 %.

Выясним теперь, как влияет разброс каждого в отдельности параметра на динамическую ошибку системы (на границы найденной выше области). Для этого вычислим частные производные от функций границ области по средним квадратическим отклонениям вариаций параметров в точке заданных значений этих средних квадратических отклонений. Абсолютные величины производных определяют «вес» каждой вариации и тем самым дадут возможность выявить их «иерархию».

Продифференцировав (5), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_B}{\partial \sigma_i} &= \frac{\partial M_{\Delta}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \sigma_{\Delta}}{\partial \sigma_i} K_2 + \sigma_{\Delta} \frac{\partial K_2}{\partial \sigma_i}, \\ \frac{\partial x_H}{\partial \sigma_i} &= \frac{\partial M_{\Delta}}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial \sigma_{\Delta}}{\partial \sigma_i} K_1 + \sigma_{\Delta} \frac{\partial K_1}{\partial \sigma_i}, (i = 1, 2, \dots, m).\end{aligned}\quad (6)$$

Считая K_1 и K_2 сложными функциями от σ_i , можно записать

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_1}{\partial \sigma_i} &= \frac{\partial K_1}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial K_1}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \sigma_i}, \\ \frac{\partial K_2}{\partial \sigma_i} &= \frac{\partial K_2}{\partial \gamma_1} \frac{\partial \gamma_1}{\partial \sigma_i} + \frac{\partial K_2}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_2}{\partial \sigma_i}, \\ (i &= 1, 2, \dots, m).\end{aligned}\quad (7)$$

Все элементы формул (6), (7) легко вычисляются на компьютере в конечных разностях, при этом $\frac{\partial K_i}{\partial \gamma_j}$ ($i, j = 1, 2$) целесообразно табулировать для различных значений γ_1 и γ_2 .

Для сравнительного анализа могут оказаться более удобными «весовые» коэффициенты Q_i ($i = 1, 2, \dots, m$), например, для верхней границы имеющие вид

$$\begin{aligned}Q_i &= \frac{\frac{\partial x_B}{\partial \sigma_i}}{\sum_{i=1}^m \frac{\partial x_B}{\partial \sigma_i}}, \\ (\sum_{i=1}^m Q_i &= 1).\end{aligned}\quad (8)$$

Таким образом, прямую задачу можно считать решенной. Обратная задача - определение вероятности попадания реализаций фазовой координаты в заданный допуск - решается достаточно просто путем интегрирования выражения (3) в пределах, соответствующих допуску. Необходимые в этом случае таблицы производных от нормальной функции распределения можно найти в [3], либо использовать возможности

математических прикладных программ, например, Matlab, Mathematica, Mathcad, Statistica.

На основании представленной инженерной методики были проведены исследования надёжности системы амортизации транспортного средства. В состав упруго-массовой расчетной модели входило более пятидесяти параметров, допусковый случайный разброс которых учитывался при определении максимальных значений перемещений и скоростей штоков амортизаторов.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-08-00699.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенwasser Е.Н., Юсупов Р.М. Методы теории чувствительности в автоматическом управлении Л: Энергия, Ленинградское отделение, 1971. – 344 с.
2. Светлицкий В. А. Статистическая механика и теория надёжности: учебник для вузов - М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 503 с.
3. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир, 1979. – 648 с.