

Оценка действия гармонической помехи на фазовую автоподстройку

77-30569/353914

04, апрель 2012

Шахтарин Б. И.

УДК 621.396

МГТУ им. Н.Э. Баумана
shakhtarin@mail.ru

Введение

Воздействие помех на системы синхронизации в устройствах радионавигации (ГЛОНАСС, GPS и др.), радиосвязи и радиолокации рассматривалось в ряде работ [1-3 и др.]. Среди помех особое внимание уделяется активным помехам, к которым, в частности относятся гармонические прицельные и перестраиваемые помехи. Особое внимание в последние годы уделяется воздействию гармонических помех на системы фазовой автоподстройки (ФАП) [4-7].

В работах [5-7] методом гармонического баланса найден ряд динамических характеристик ФАП при условии что частота гармонической помехи лежит за пределами полосы синхронизации ФАП, причем в [5] это сделано при условии малой амплитуды биений.

В [6, 7] рассмотрен более общий случай, однако в [6] основное соотношение представлено без его вывода, в связи с чем трудно судить о точности и достоверности полученного результата.

В данной статье приводится подробный вывод основного соотношения метода гармонического баланса из которого видна степень приближения полученного результата и следовательно, возможность оценки его точности.

1. Основные соотношения метода гармонического баланса

Можно показать, что при воздействии на ФАП наряду с сигналом и гармонической помехи дифференциальное уравнение ФАП имеет вид [5]

$$px = \beta - F(p)[\sin x + \varepsilon \sin(x + dt + \Delta\theta)], \quad (1)$$

где, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования; $t = \Omega t_1$; $t_{1,c}$ – время; Ω – полоса синхронизации ФАП; $x = x(t)$ – сигнал рассогласования; $\beta = \Omega_0/\Omega$; $\Omega_0 = \omega_c - \omega_0$ – расстройка по частоте сигнала ω_c и частотой управляемого генератора (УГ) ω_0 ; $\varepsilon = A_n/A_c$ – отношение амплитуд помехи A_n и сигнала A_c (ОПС); $d = \Delta\Omega/\Omega$; $\Delta\Omega = \omega_n - \omega_c$ – разность частот помехи и сигнала.

Предполагаемое решение дифференциального уравнения (1) в методе гармонического баланса при учете лишь одной гармоники принимается в виде [5, 6]

$$x(t) = x_0 + x_1 \cos(dt + \Delta\theta + \varphi) = x_0 + x_1 \cos\Phi. \quad (2)$$

Параметры предполагаемого решения (2) – постоянная составляющая x_0 , амплитуда первой гармоники x_1 и фазовый угол ψ – находятся в процессе гармонического баланса, подстановкой (2) в левую и правую части дифференциального уравнения (1).

В книге [5] автора данной публикации эти параметры находились при условии малого значения амплитуды x_1 и при условии $d \gg 1$, что обусловило использование приближенных соотношений [5] (нулевое приближение):

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin x_0 + x_1 \cos x_0 \cos \Phi, \\ \cos x &= \cos x_0 - x_1 \sin x_0 \cos \Phi, \end{aligned} \quad (3)$$

Затем в статье автора [7] получены уточняющие соотношения на основе первого приближения.

В данной статье при использовании дифференциального уравнения (1) и предполагаемого решения в форме (2) используется более строгий подход (второе приближение), когда вместо (3) и [7] используются приближения более высокого порядка, в связи с чем повышается точность полученных результатов: динамических характеристик и критических значений параметров ФАП и помехи.

В данном случае в отличие от [7] используются отрезки рядов

$$\begin{aligned}\sin(x_1 \cos \Phi) &= 2J_1 \cos \Phi, \\ \cos(x_1 \cos \Phi) &= J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi,\end{aligned}\tag{4}$$

где $J_0 = J_0(x_1)$; $J_1 = J_1(x_1)$; $J_2 = J_2(x_1)$ – функции Бесселя соответствующих порядков, причем, здесь в отличие от [7], добавляется в разложении (4) вторая гармоника $\cos 2\Phi$.

В результате вместо (3) и [7] и используются соотношения

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin x_0 [J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi] + \cos x_0 [2J_1 \cos \Phi], \\ \cos x &= \cos x_0 [J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi] - \sin x_0 [2J_1 \cos \Phi].\end{aligned}\tag{5}$$

Подставляя предполагаемое решение (2) в исходное дифференциальное уравнение (1), получим

$$\begin{aligned}
& -dx_1 \sin \Phi = \beta - F(p)\{\sin x + \varepsilon \sin(x + dt + \Delta\theta)\} = \\
& = \beta - F(p)\{\sin[x_0 + x_1 \cos \Phi] + \varepsilon \sin x \cos(\Phi - \psi) + \varepsilon \cos x \sin(\Phi - \psi)\} = \\
& = \beta - F(p)\{\sin x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) + \cos x_0 \sin(x_1 \cos \Phi) + \\
& + \varepsilon \sin(x_0 + x_1 \cos \Phi)(\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi) + \\
& + \varepsilon \cos(x_0 + x_1 \cos \Phi)(\sin \Phi \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi)\} = \\
& \beta - F(p)\{\sin x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) + \cos x_0 \sin(x_1 \cos \Phi) + \\
& + \varepsilon[\sin x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) + \cos x_0 \sin(x_1 \cos \Phi)]\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi + \\
& + \varepsilon[\cos x_0 \cos(x_1 \cos \Phi) - \sin x_0 \sin(x_1 \cos \Phi)]\sin \Phi \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi\}.
\end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением (4). В результате получим (первая стадия упрощения)

$$\begin{aligned}
& -dx_1 \sin \Phi = \beta - F(p)\{\sin x_0(J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) + \cos x_0 2J_1 \cos \Phi + \\
& + \varepsilon[\sin x_0(J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) + \cos x_0 2J_1 \cos \Phi]\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi + \\
& + \varepsilon[\cos x_0(J_0 - 2J_2 \cos 2\Phi) - \sin x_0 2J_1 \cos \Phi]\sin \Phi \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi\}.
\end{aligned}$$

На второй стадии упрощения пренебрегаем второй гармоникой во втором слагаемом в фигурных скобках, при перемножении воспользуемся приближенными равенствами (отбросим третьи гармоники)

$$\cos 2\Phi \cos \Phi \approx \frac{1}{2} \cos \Phi, \quad \cos 2\Phi \sin \Phi \approx -\frac{1}{2} \sin \Phi,$$

а также отбросим вторые гармоники, возникающие в произведениях,

$$2 \sin \Phi \cos \Phi = \sin 2\Phi, \quad \cos^2 \Phi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\Phi) \approx \frac{1}{2}.$$

В результате в правой части приведенного соотношения останутся лишь первые гармоники вида $\sin \Phi$ и $\cos \Phi$:

$$\begin{aligned}
-dx_1 \sin \Phi = & \beta - F(p) \{ J_0 \sin x_0 + \cos x_0 2J_1 \cos \Phi + \\
& + \varepsilon J_0 \sin x_0 (\cos \Phi \cos \psi + \sin \Phi \sin \psi) - \\
- \varepsilon J_2 \sin x_0 \cos \psi \cos \Phi + & \varepsilon J_2 \sin x_0 \sin \psi \sin \Phi + \varepsilon J_1 \cos x_0 \cos \psi + \\
& + \varepsilon J_0 \cos x_0 (\sin \Phi \cos \psi - \cos \Phi \sin \psi) + \\
+ \varepsilon J_2 \cos x_0 \cos \psi \sin \Phi + & \varepsilon J_2 \cos x_0 \sin \psi \cos \Phi + \varepsilon J_1 \sin x_0 \sin \psi \}.
\end{aligned}$$

Выделим в правой части данного соотношения постоянную составляющую

$$\beta - M_0 [J_0 \sin x_0 + \varepsilon J_1 \cos(x_0 - \psi)] = 0, \quad (6)$$

где $M_0 = |F(0)|$.

В результате остающиеся переменные характеризуются соотношениями

$$-dx_1 \sin \Phi = F(p)(A \cos \Phi - B \sin \Phi), \quad (7)$$

где $A = -2J_1 \cos x_0 - \varepsilon(J_0 - J_2) \sin(x_0 - \psi)$, $B = \varepsilon(J_0 + J_2) \cos(x_0 - \psi)$.

Запишем передаточную функцию фильтра в комплексной форме

$$F(p) = M e^{iP}, \text{ где } M = |F(p)|; P = \arg F(p). \quad (8)$$

В результате из (7) с учетом (8) находим

$$\begin{aligned}
-\frac{dx_1}{M} \sin \Phi &= A \cos(\Phi + P) - B \sin(\Phi + P) = \\
&= A(\cos \Phi \cos P - \sin \Phi \sin P) - B(\sin \Phi \cos P + \cos \Phi \sin P) = \\
&= (A \cos P - B \sin P) \cos \Phi - (A \sin P + B \cos P) \sin \Phi.
\end{aligned}$$

После гармонического баланса по $\sin\Phi$ и $\cos\Phi$ получим два уравнения относительно величин $\cos P$ и $\sin P$:

$$\begin{aligned} A \cos P - B \sin P &= 0; \\ B \cos P + A \sin P &= \frac{dx_1}{M}. \end{aligned} \quad (9)$$

Определитель Δ системы уравнений (9)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} = A^2 + B^2.$$

В результате решения системы уравнений (9) находим искомые величины $\cos P$ и $\sin P$ в виде

$$\cos P = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \sin P = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad (10)$$

$$\text{где } \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -B \\ \frac{dx_1}{M} & -A \end{vmatrix} = B \frac{dx_1}{M} = \frac{dx_1}{M} \varepsilon(J_0 + J_2) \cos(x_0 - \psi);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & \frac{dx_1}{M} \end{vmatrix} = \frac{dx_1}{M} A = -\frac{dx_1}{M} \varepsilon(J_0 - J_2) \sin(\psi - x_0) - 2J_1 \cos x_0.$$

Очевидно, что

$$\sin^2 P + \cos^2 P = \frac{\Delta_1^2}{\Delta^2} + \frac{\Delta_2^2}{\Delta^2} = 1.$$

Отсюда имеем

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 = \left(\frac{x_1 d}{M}\right) (A^2 + B^2) = \left(\frac{x_1 d}{M}\right)^2 \Delta = \Delta^2.$$

Таким образом, эквивалентная запись определителя имеет вид

$$\Delta = \left(\frac{x_1 d}{M}\right)^2.$$

Поэтому окончательно получим

$$\begin{aligned} \cos P &= \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{M^2}{(x_1 d)^2} \frac{x_1 d}{M} B = \frac{M}{x_1 d} B, \\ \sin P &= \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{M^2}{(x_1 d)^2} \frac{x_1 d}{M} A = \frac{M}{x_1 d} A. \end{aligned}$$

Или в другой форме:

$$x_1 d \cos P = \varepsilon M (J_0 + J_2) \cos(\psi - x_0), \quad (11)$$

$$x_1 d \sin P = M \left[\varepsilon (J_0 - J_2) \sin(\psi - x_0) - 2J_1 \cos x_0 \right], \quad (12)$$

где $J_0 = J_0(x_1)$; $J_1 = J_1(x_1)$; $J_2 = J_2(x_1)$.

Полученные соотношения (6), (11), (12) совпадают с соответствующими уравнениями (7), (8), (9), приведенные без вывода в [6] и по приведенному процессу их вывода теперь можно судить о степени приближенности найденных соотношений.

При $J_2 = J_2(x_1) = 0$ по (11), (12) находится частный случай, полученный автором в [7].

2. Соотношение для параметров x_0, x_1, ψ предполагаемого решения дифференциального уравнения

По (11) и (12) может быть найдена система уравнений относительно величины $\cos\psi$ и $\sin\psi$, имеющая вид

$$\begin{aligned} \cos x_0 \cos \psi + \sin x_0 \sin \psi &= c_1, \\ -\sin x_0 \cos \psi + \cos x_0 \sin \psi &= c_2, \end{aligned} \quad (13)$$

где $c_1 = \frac{x_1 d}{\varepsilon M(J_0 + J_2)} \cos P$; $c_2 = \frac{x_1 d}{\varepsilon M(J_0 - J_2)} \sin P + \frac{2 \cos x_0}{\varepsilon(J_0 - J_2)} J_1$.

Определитель системы уравнений (13) равен единице, поэтому

$$\cos \psi = \Delta_1; \quad \sin \psi = \Delta_2, \quad (14)$$

где

$$\Delta_1 = \frac{x_1 d}{\varepsilon M(J_0^2 - J_2^2)} [J_0 \cos(P + x_0) - J_2 \cos(P - x_0)] - \frac{J_1}{\varepsilon(J_0 - J_2)} - \sin 2x_0 = \gamma_1 F_1;$$

$$\Delta_2 = \frac{x_1 d}{\varepsilon M(J_0^2 - J_2^2)} [J_0 \sin(x_0 + P) - J_2 \sin(x_0 - P)] + \frac{2J_1}{\varepsilon(J_0 - J_2)} \cos^2 x_0 = \gamma_1 F_2.$$

здесь $\gamma_1 = \frac{x_1 d}{\varepsilon M(J_0^2 - J_2^2)}$;

$$F_1 = d [J_0 \cos(P + x_0) - J_2 \cos(P - x_0)] - 0.5 \left(\frac{2}{x_1} J_1 \right) M(J_0 + J_2) \sin 2x_0;$$

$$F_2 = d [J_0 \sin(P + x_0) + J_2 \sin(P - x_0)] + \left(\frac{2}{x_1} J_1 \right) M(J_0 + J_2) \cos^2 x_0.$$

При малых значениях амплитуды x_1 $J_2(x_1) \approx 0$, поэтому в этом случае из (14) находим [7]

$$\Delta_1 = \frac{x_1}{\varepsilon M J_0} \left[d \cos(P + x_0) - 0.5 \left(\frac{2}{x_1} J_1 \right) M \sin 2x_0 \right] = \gamma_{10} F_{10}; \quad (15)$$

$$\Delta_2 = \frac{x_1}{\varepsilon M J_0} \left[d \sin(x_0 + P) + \left(\frac{2}{x_1} J_1 \right) M \cos^2 x_0 \right] = \gamma_{20} F_{20}. \quad (16)$$

Далее из (12) находим

$$\sin(\psi - x_0) = \frac{1}{\varepsilon(J_0 - J_2)} \left(\frac{dx_1}{M} \sin P + 2J_1 \cos x_0 \right) = G.$$

Тогда

$$\psi = \begin{cases} x_0 + \varphi & \text{при } d < 0, \beta > 0; \\ x_0 - \varphi + \pi & \text{при } d < 0, \beta > 0, \end{cases} \quad (17)$$

где $\varphi = \arcsin G$.

Графики зависимости $\psi=f(d)$ изображены на рис. 1 при $\varepsilon=0,5$; $a=0,8$; $\alpha_0^{-2} = 6,25$ где кривые 1, 3, 5 получены при невырожденном фильтре; 2, 4, 6 – при вырожденном фильтре. Кривые 1, 2 получены при $\beta=0,9$; 3, 4 – при $\beta=0,7$; 5, 6 – при $\beta=0,5$.

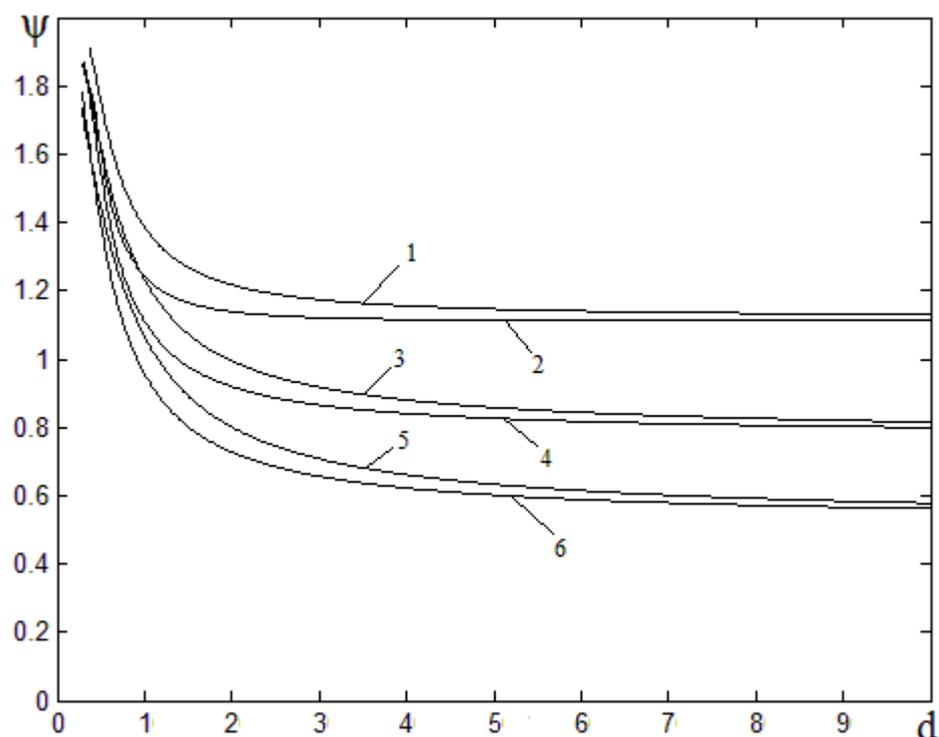


Рисунок 1 Зависимость фазового угла ψ в предполагаемом решении от нормированной разности частот d

Соотношение для постоянной составляющей x_0 находится по (6) с учетом (11) и имеет вид

$$\sin x_0 = \left[\frac{\beta}{M_0} - J_1 \frac{x_1 d \cos P}{M(J_0 + J_2)} \right] \frac{1}{J_0}. \quad (18)$$

Графики зависимости $x_0=f(d)$ изображены на рис. 2 при $\varepsilon=0,5$; $a=0,8$; $\alpha_0^{-2} = 6,25$ где кривые 1, 3, 5 получены при невырожденном фильтре; 2, 4, 6 – при вырожденном фильтре. Кривые 1, 2 получены при $\beta=0,9$; 3, 4 – при $\beta=0,7$; 5, 6 – при $\beta=0,5$.

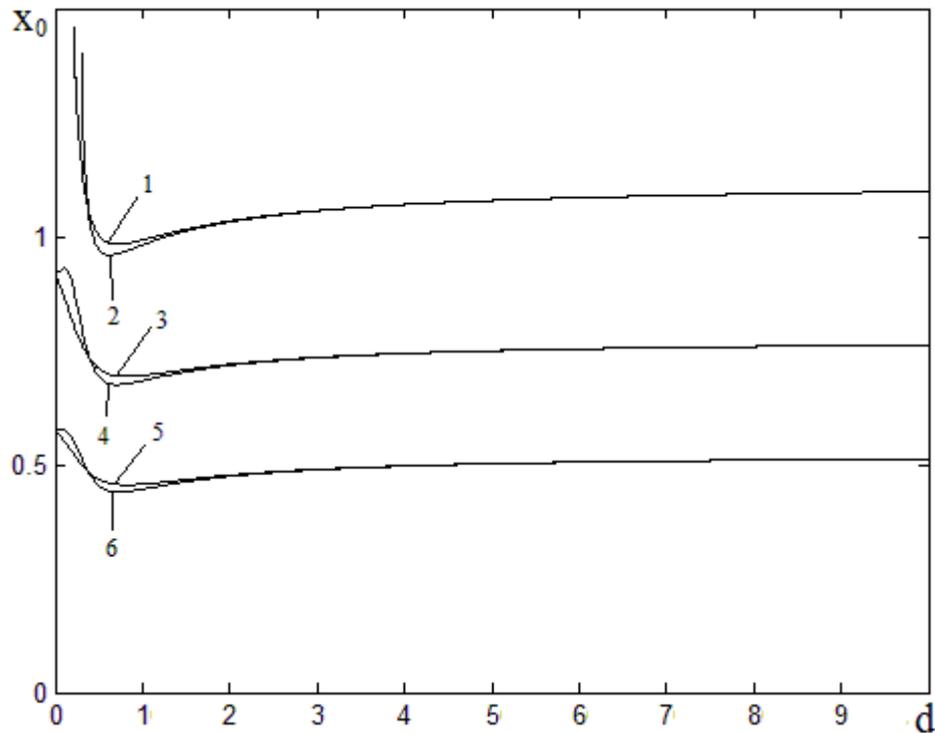


Рисунок 2 Зависимость постоянной составляющей x_0 предполагаемого решения от нормированной разности частот d

Остается найти зависимость амплитуды x_1 первой гармоники предполагаемого решения от параметров ФАП и отстройки d .

По (14) находим неявную зависимость

$$x_1^2 = \frac{(\varepsilon M)^2 (J_0^2 - J_2^2)^2}{d^2 (F_1^2 + F_2^2)}. \quad (19)$$

При больших отстройках d находим

$$x_1^2 = \frac{\varepsilon^2 J_0^2}{d^2 + [2J_1(x_1)/x_1]^2 \cos^2 x_0} \approx \frac{\varepsilon^2}{d^2 + 1 - \beta^2}. \quad (20)$$

Графики зависимости $x_1=f(d)$ изображены на рис. 3 при $\varepsilon=0,5$; $a=0,8$; $\alpha_0^{-2} = 6,25$ где кривые 1, 3, 5 получены при невырожденном фильтре; 2, 4, 6 –

при вырожденном фильтре. Кривые 1, 2 получены при $\beta=0,9$; 3, 4 – при $\beta=0,7$; 5, 6 – при $\beta=0,5$.

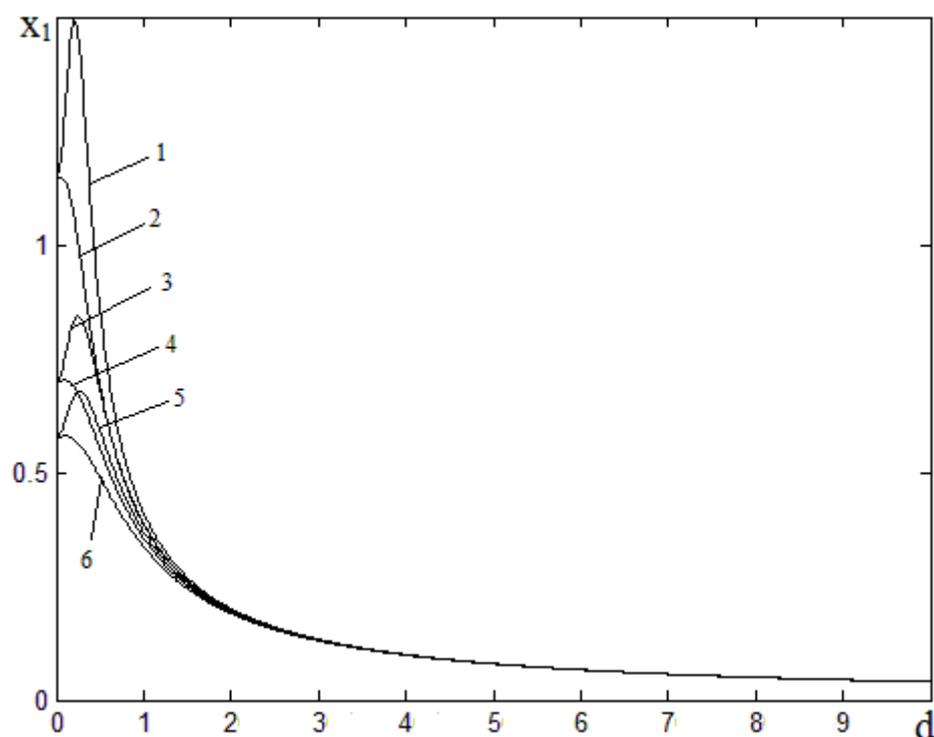


Рисунок 3 Зависимость амплитуды x_1 первой гармоники предполагаемого решения от нормированной разности частот d .

Заключение

Таким образом, получены основные соотношения (6), (11), (12) методе гармонического баланса, и в процессе их вывода отмечены стадии упрощения, по которым можно судить о степени точности полученных соотношений. В частном случае $J_2 = J_2(x_1) = 0$ уравнения совпадают с соотношениями, полученными автором ранее в [7].

Найдены значения выходных параметров предполагаемого решения (2) ДУ (1) ФАП: x_0, x_1, ψ (Рис 1-3).

Литература

1. Перунов Ю.М., Фомичев К.И., Юдин Л.М. Радиозлектронное подавление информационных каналов систем управления оружием. – М.: Радиотехника, 2003. – 416с.
2. Защита радиолокационных систем от помех. Состояние и тенденции развития / под ред. А.Н. Канащенко и В.И. Меркулова. – М.: Радиотехника, 2003. – 416с.
3. Борисов В.Н., Зинчук В.М. Помехозащищенность систем радиосвязи. Вероятностно-временной подход. Изд. 2е, исправленное. – М.: Радио Софт, 2008. – 260с.
4. Шахтарин Б.И. Анализ систем синхронизации методом усреднения. – М.: Радио и связь. 1999. – 496с.
5. Шахтарин Б.И. Статистическая динамика систем синхронизации. – М.: Радио и связь, 1998. – 488с.
6. Karsi MF., Lindsey W.C. Effects of CW interference on phase-locked performance // IEEE Trans. 2000.v COM – 48, N5, p 886-896.
7. Шахтарин Б.И. Анализ фазовой автоподстройки при наличии гармонической помехи.// Электронное научно-техническое издание «Наука и образование» 2012, №1, янв, с.1-12.

Estimation of influence of harmonic interference on phase locked loop.

77-30569/353914

04, April 2012

Shahtarin B.I

Bauman Moscow State Technical University
shakhtarin@mail.ru

The harmonic interference affecting the phase locked loop can cause a number of unwanted effects, reducing stability of the phase locked loop and distorting the information contained in the incoming signal. Several dynamic characteristics of phase locked loop were obtained by the method of harmonic balance, under the stipulation that the frequency of harmonic interference lies outside the phase locked loop synchronization band.

Publications with keywords: [harmonic interference](#), [stochastic differential equation](#), [probability density function](#)

Publications with words: [harmonic interference](#), [stochastic differential equation](#), [probability density function](#)

References

1. Perunov Iu.M., Fomichev K.I., Iudin L.M. *Radioelektronnoe podavlenie informatsionnykh kanalov sistem upravleniia oruzhiem* [Radio electronic suppression of data channels weapon control systems]. Moscow, Radiotekhnika, 2003. 416 p.
2. Kanashenkov A.N., Merkulov V.I. *Zashchita radiolokatsionnykh sistem ot pomekh. Sostoianie i tendentsii razvitiia* [Protection of radar systems from interference. Status and trends of development]. Moscow, Radiotekhnika, 2003. 416 p.
3. Borisov V.N., Zinchuk V.M. *Pomekhozashchishchennost' sistem radiosviasi. Veroiatnostno-vremennoi podkhod* [Noise immunity of radio communication systems. Probabilistic-and-time approach]. Moscow, Radio Soft, 2008. 260 p.
4. Shahtarin B.I. *Analiz sistem sinkhronizatsii metodom usredneniia* [Analysis of synchronization systems by the averaging method]. Moscow, Radio i sviaz', 1999. 496 p.
5. Shahtarin B.I. *Statisticheskaiia dinamika sistem sinkhronizatsii* [Statistical dynamics of synchronization systems]. Moscow, Radio i sviaz', 1998. 488 p.
6. Karsi MF., Lindsey W.C. Effects of CW interference on phase-locked performance. *IEEE Trans. Commun.*, 2000, vol. 48, no. 5, pp. 886-896.

7. Shakhtarin B.I. Analiz fazovoi avtopodstroiki pri nalichii garmonicheskoi pomekhi [Analysis of the phase locked loop in the presence of harmonic interference]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana* [Science and Education of the Bauman MSTU], 2012, no. 1, available at: <http://technomag.edu.ru/doc/297921.html>.