

Перестраиваемые акустические фильтры на основе гофрированных трубок

77-30569/308455

02, февраль 2012

Быков Н. В.

УДК 534.2

МГТУ им. Н.Э. Баумана

bykovnv@bk.ru

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы, связанные с распространением акустических волн в гофрированных трубках вызывают интерес у исследователей довольно давно. В частности, как и у любой периодической структуры, в которой могут распространяться волны, у подобных трубок есть фильтрующие свойства. В этом случае легко прослеживается аналогия с оптикой кристаллов, которые обладают схожими свойствами при прохождении через них рентгеновского излучения. Явным преимуществом гофрированных трубок по сравнению с обычными слоистыми конструкциями является то, что при наличии потока среды (жидкости или газа) внутри них, частоту фильтрации можно в некоторых пределах регулировать.

Несмотря на то, что акустические свойства гофрированных трубок уже довольно хорошо исследованы (см. работу [1] и ссылки в ней), вопросы, связанные с построением более сложных акустических схем на их основе до настоящего времени не рассматривались. В данной работе показано, что можно построить и дальнейшие аналогии с оптическими периодическими структурами – например, возможно использование двух гофрированных участков трубы разделенных гладким цилиндрическим промежутком в роли акустического резонатора. В качестве преимущества такого резонатора можно указать то, что его можно перестраивать с помощью регулирования скорости потока. При этом в работе основное внимание уделено принципу действия такого резонатора на примере трубки переменного сечения, среда внутри которой покоится. Такое упрощение связано в первую очередь с громоздкостью вычислений в случае наличия потока. Однако, имея решение такой задачи, нетрудно провести обобщение на случай движущейся среды.

ГОФРИРОВАННАЯ ТРУБКА

Прежде чем исследовать свойства резонатора, получим приближенные уравнения, описывающие распространение звуковых волн в обычной гофрированной трубке. В качестве модели для распространения волн в такой трубке будем рассматривать модель квазиодномерного течения, которая применима в случае достаточно узких по сравнению с периодом неоднородностей трубок [2]

$$S(x) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho S u) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $\rho(x, t)$ – массовая плотность, $u(x, t)$ – скорость, $p(x, t)$ – давление среды внутри трубки, $S(x)$ – площадь поперечного сечения трубки, x – пространственная координата, отсчитываемая от входа в трубку, t – время.

Движение среды в трубке можно представить в виде суммы основного (невозмущенного) стационарного течения и наложенных на него малых возмущений (или, собственно, самого звука). При этом, в силу того, что мы условились рассматривать покоящуюся среду, распределение параметров в невозмущенном течении постоянно по длине трубки. В результате решение следует искать в виде $u(x, t) = u_1(x, t)$, $\rho(x, t) = \rho_0 + \rho_1(x, t)$, $p(x, t) = p_0 + p_1(x, t)$, где индексом «0» отмечены параметры покоящейся среды, а индексом «1» – наложенные малые возмущения. При этом считается, что значения параметров с индексом «1» много меньше соответствующих значений параметров с индексом «0». Кроме того, воспользуемся уравнением состояния для адиабатического движения $p_1 = c_s^2 \rho_1$, где c_s – скорость звука в среде. Подставляя указанный вид решений в систему (1), и пренебрегая малыми членами второго порядка (такими как произведение двух членов с индексом «1»), после простых преобразований получим известное уравнение, описывающее распространение акустических волн в трубке переменного сечения [2]

$$\frac{1}{S(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0. \quad (2)$$

Вид функции, описывающей зависимость площади сечения трубки от координаты, задается исходя из решаемой задачи. Следует лишь заметить, что для того, чтобы уравнения (1) сохранили силу, форма трубки должна меняться достаточно плавно. В гофрированной трубке площадь сечения можно представить в виде $S(x) = S_0(1 + \alpha \sin(bx))$, где S_0 – площадь сечения трубки на входе, α , b – постоянные, задающие геометрию гофра. При этом условимся считать параметр возмущения формы трубки малым, т.е. $\alpha \ll 1$.

Будем считать, что решение уравнения (2) зависит от времени гармоническим образом, т.е. $\partial p_1 / \partial t = -i\omega p_1$. Тогда, с учетом дисперсионного уравнения $\omega = c_s k$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$p_1''(x) + \frac{1}{S(x)} \frac{dS}{dx} p_1'(x) + k^2 p_1(x) = 0 \quad (4)$$

С помощью подстановки $p_1(x) = p_a(x) / (S(x))^{1/2}$ можно избавиться от первой производной в уравнении (4) и прийти к уравнению вида

$$p_a''(x) + \left(k^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \right)^2 \right) p_a(x) = 0. \quad (5)$$

Это уравнение с периодическим коэффициентом типа Хилла [3]. Используя ранее определенную функцию площади $S(x) = S_0(1 + \alpha \sin(bx))$, проведем линеаризацию коэффициента в уравнении (5) по малому параметру α . В результате получим уравнение типа Матье

$$p_a''(x) + \left(k^2 + \frac{1}{2} \alpha b^2 \sin(bx) \right) p_a(x) = 0. \quad (6)$$

Точное решение этого уравнения можно получить с помощью специальных функций Матье, однако для дальнейших целей удобнее получить решение другим, приближенным способом. Представим решение уравнения (6) в виде суммы падающей и отраженной волн $p_a(x) = p_t(\alpha x) e^{ikx} + p_r(\alpha x) e^{-ikx}$, где амплитуды падающей и отраженной волн считаются медленно изменяющимися, что означает [4]

$$\left| \frac{d^2 p_{r,t}}{dx^2} \right| \ll 2k \left| \frac{dp_{r,t}}{dx} \right|. \quad (7)$$

Опишем кратко ход дальнейших, в целом типовых, преобразований уравнения (6). Функция $\sin(bx)$ представим в виде суммы экспонент, в результате получим сумму членов, содержащих различные экспоненты типа $e^{\pm ikx}$, $e^{\pm i(k \pm b)x}$ и т.д. Используем стандартное условием синхронизма [4] $k = b / 2$, при котором взаимодействие волны и периодической структуры происходит наиболее эффективно. Получающимися быстроосциллирующими членами вида $\exp(\pm 3ibx)$ пренебрежем. Кроме того, воспользуемся условием (7) для отбрасывания медленно меняющейся второй производной от давления. Приравнявая в результате члены при сомножителях e^{ikx} и e^{-ikx} к нулю, получим окончательно систему уравнений связанных волн

$$p_t'(x) = -\frac{\alpha b}{4} p_r(x), \quad p_r'(x) = -\frac{\alpha b}{4} p_t(x), \quad (8)$$

которая легко интегрируется, так что

$$\begin{aligned} p_t'(x) &= C_1 \operatorname{ch}(abx/4) - C_2 \operatorname{sh}(abx/4), \\ p_r'(x) &= -C_1 \operatorname{sh}(abx/4) + C_2 \operatorname{ch}(abx/4). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь произвольные коэффициенты C_1 и C_2 в случае гофрированной трубки (без цилиндрического участка) длины L определяются из известных граничных условий [4]

$$p_r(x=0) = A, \quad p_t(x=L) = 0,$$

где A – заданная амплитуда волны на входе в трубку. Решение в этом случае имеет вид, показанный на рис. 1.

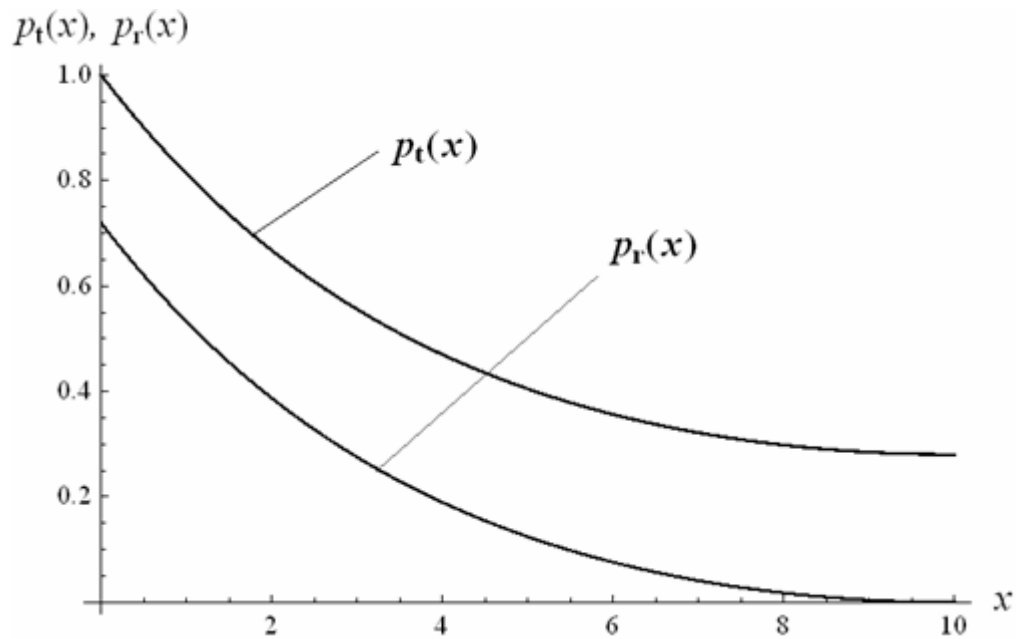


Рис. 1. Решение уравнений (8) для гофрированной трубки при параметрах $a = 0.1$, $b = 5$, $L = 10$.

Такое решение физически означает, что при распространении звуковой волны с волновым вектором $k = b/2$ вдоль гофрированной трубки происходит эффективное взаимодействие между падающей и отраженной волной, и энергия падающей волны передается отраженной волне. В результате такого взаимодействия падающая волна испытывает сильное отражение от периодической структуры и может быть достигнут очень высокий коэффициент отражения – в рассматриваемом примере он составляет приблизительно 0.7, однако может быть увеличен практически до 1 за счет удлинения трубки.

АКУСТИЧЕСКИЙ РЕЗОНАТОР

Рассмотрим теперь акустический резонатор, который состоит из двух гофрированных и разделяющего их цилиндрического участков (рис. 2). Учтем, что система уравнений вида (8) описывает поведение волны в каждой из гофрированных частей трубки. При этом, чтобы описать ход волн в резонаторе, для волн во второй периодической структуре следует добавить фазовый множитель $e^{i\varphi}$, где $\varphi = kL_0$ – разность фаз, приобретаемая волной в результате прохождения цилиндрического участка.

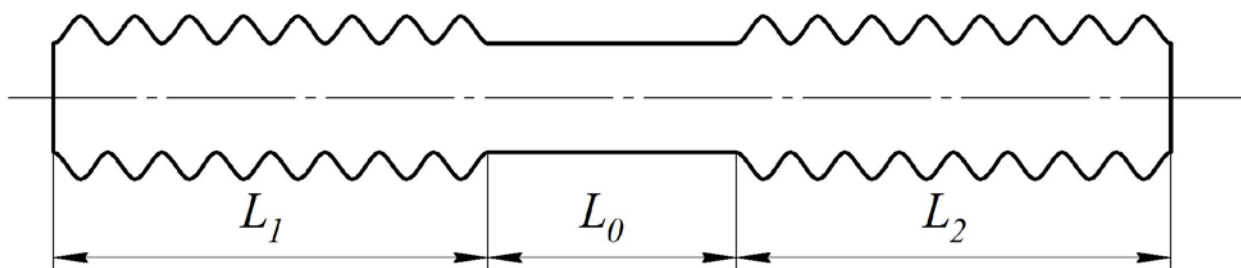


Рис. 2. Геометрия акустического резонатора: L_1 – длина первого гофрированного участка, L_0 – длина цилиндрического участка, L_2 – длина второго гофрированного участка трубки

Для того, чтобы получить общее решение для резонатора, следует поставить дополнительные граничные условия для «сшивки» решений в первой и второй гофрированных частях трубки

$$\begin{aligned} p_t^I(x=L_1) &= e^{i\varphi} p_t^{II}(x=L_1+L_0), \\ p_r^I(x=L_1) &= e^{-i\varphi} p_r^{II}(x=L_1+L_0), \end{aligned} \quad (10)$$

где верхние индексы «I», и «II» означают номер гофрированного участка. Фактически, задача сводится к решению двух систем вида (9), в ходе которого требуется определить четыре константы.

На рис. 3 показано решение соответствующей системы уравнений связанных волн для резонатора с параметрами $\alpha = 0.2$, $b = 100$, $L_1 = \pi/5$, $L_2 = \pi/5$; $L_0 = \pi/4$. При этом возрастанию амплитуд падающей и отраженной волн соответствует первый гофрированный участок трубки, горизонтальный участок соответствует цилиндрической части, и затухающие решения – второму гофрированному промежутку.

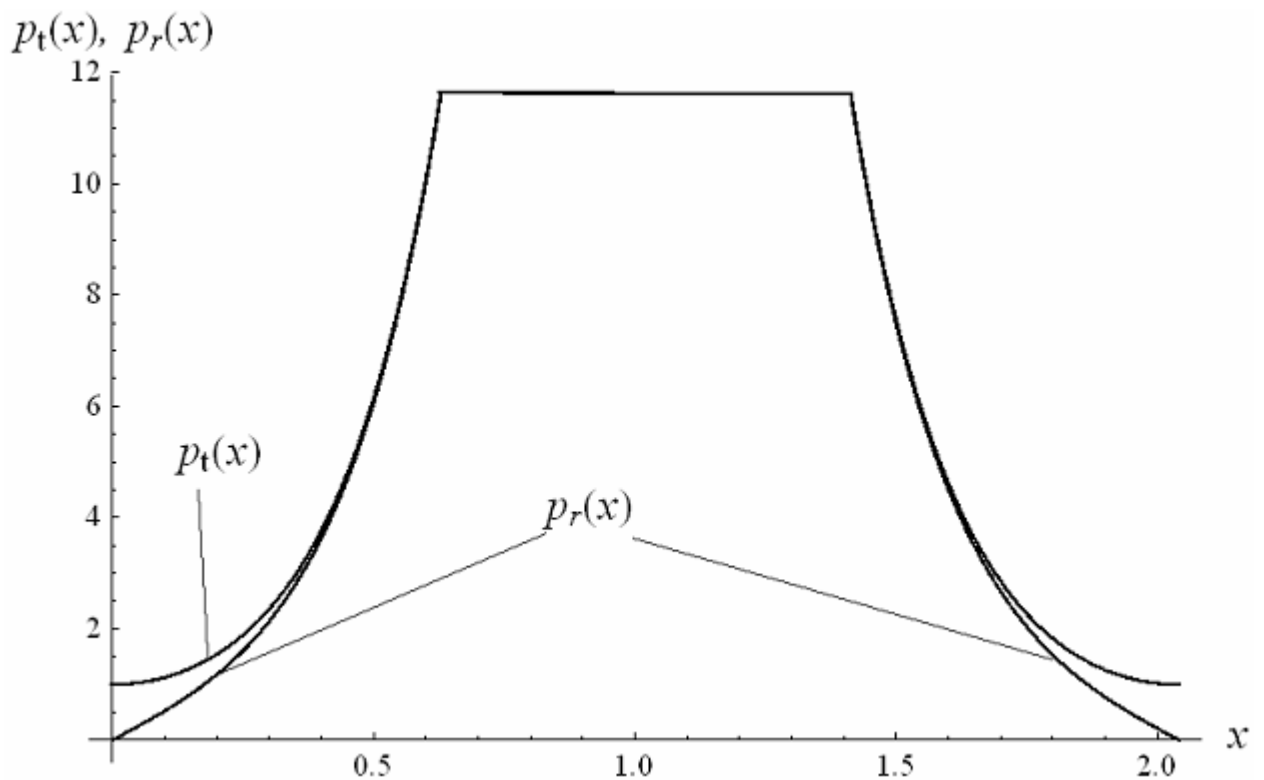


Рис. 3. Распределение падающей и отраженной волн в резонаторе

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из полученного решения (рис. 3), акустический резонатор по своим свойствам в рамках рассматриваемой упрощенной модели очень близок к аналогичному оптическому резонатору. Это позволяет выдвигать идеи об использовании конструкций с гофрированными трубками в основе акустических устройств аналогичных по действию оптическим приборам, в которых используются резонаторы.

Сделаем дополнительно несколько существенных замечаний о случае ненулевой скорости потока. Распространение волн в гофрированной трубке при наличии потока подробно исследовано в работе [5], в которой получено условие синхронизма

$$\omega = \frac{1}{2}bc_s(1 - u_0(0)^2/c_s^2),$$

где $u_0(0)$ – скорость основного потока во входном сечении с координатой $x = 0$. Как видно из этого условия, частота работы резонатора может быть не только равной $\frac{1}{2}bc_s$ как в рассмотренном в настоящей работе случае, но и отклоняться от этого условия при изменении входной скорости потока $u_0(0)$. Таким образом, можно образовать как перестраиваемые фильтры на основе простых гофрированных трубок, так и перестраиваемые резонаторы на основе гофрированных трубок с цилиндрическим участком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hawwa M.A. Acoustic wave blocking in a duct with a chirped periodic wall // The Arabian Journal for Science and Engineering, vol. 29, №1С, 2004.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. – 5-е изд., стереот. – М.: Физматлит, 2006. – 736 с.
3. Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н. Курс современного анализа: В 2-х ч. Изд. 4-е, стереот. – М.: Едиториал УРСС, 2006. – 856 с.
4. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – 2-е изд. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
5. Быков Н.В., Пустовойт В.И. Об устойчивости течения жидкости в канале периодического сечения // ДАН, 2010, т. 433, №5, с. 625-630.

Tunable acoustic filters based on the corrugated tubes

77-30569/308455

02, February 2012

Bykov N.V.

Bauman Moscow State Technical University

bykovnv@bk.ru

The theory of acoustic resonator based on the corrugated tubes was briefly discussed. For simplicity, situation with medium at rest inside a corrugated tube was considered. Classical solutions for the resonator were obtained. It was shown that described structure could serve as an acoustic analogue of the optical resonator. Generalizations for the case of moving medium were made.

Publications with keywords: [resonator](#), [waves in periodic structures](#), [acoustics of periodic structures](#), [corrugated tubes](#)

Publications with words: [resonator](#), [waves in periodic structures](#), [acoustics of periodic structures](#), [corrugated tubes](#)

Reference

1. Hawwa M.A., Acoustic wave blocking in a duct with a chirped periodic wall, The Arabian Journal for Science and Engineering 29 (1) (2004).
2. Landau L.D., Lifshits E.M., Theoretical Physics, Vol. 6, Hydrodynamics, Moscow, Fizmatlit, 2006, 736 p.
3. Uittaker E.T., Watson D.N., A Course of Modern Analysis: In 2 parts, Moscow, Editorial URSS, 2006, 856 p.
4. Vinogradova M.B., Rudenko O.V., Sukhorukov A.P., Wave Theory, Moscow, Nauka, 1990, 432 p.
5. Bykov N.V., Pustovoi V.I., Doklady Akademii Nauk 433 (5) (2010) 625-630.