электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Стабилизация линейных лагранжевых систем при наличии запаздывания в контуре управления

77-30569/236859

10, октябрь 2011

Горбунов А.В.

УДК 519.71

МГТУ им. Н.Э. Баумана
mathmod@bmstu.ru

1. Введение

Наличие запаздывания в контурах многих систем управления определяет интенсивные исследования таких систем в последнее время (обзор см. в [1]). Известны примеры [1, 2], когда введение даже малого запаздывания в контур устойчивой системы управления приводило к потере устойчивости. Известен также пример [1], в котором введение малого запаздывания обеспечивало асимптотическую стабилизацию системы, неустойчивой в отсутствии запаздывания. Поэтому учет эффектов запаздывания оказывается важным как для точного количественного, так и для качественного описания реальных объектов.

Отметим, что асимптотическая устойчивость является грубым свойством, поэтому в некоторых случаях эффекты запаздывания можно смоделировать операторным возмущением. В таких случаях запаздыванием в задаче асимптотической стабилизации иногда пренебрегают, рассматривая задачу робастной стабилизации. Однако широко используемые для стабилизации механических систем разрывные управления, как правило, не позволяют пренебречь влиянием запаздывания.

Особое внимание в теории управления уделяется задачам стабилизации различных механических систем. Такие системы часто являются лагранжевыми, т. е. их движение может быть описано с помощью уравнений Лагранжа второго рода. К лагранжевым системам, кроме того, относятся многие электрические и электромеханические системы. Задачи стабилизации лагранжевых систем достаточно подробно рассмотрены при отсутствия запаздывания в контуре управления. Как правило, в таких задачах используется энергетический метод, в котором решение задачи стабилизации достигается управлениями, минимизирующими общую энергию системы или, в более общем случае, функцию Ляпунова – Беллмана. Основные трудности, возникающие при непосредственном применении энергетического метода в задачах асимптотической стабилизации систем с запаздыванием, указаны, в частности, в [3, с. 293].

Одна из основных причин возникновения запаздывания в механических системах — информационная [2], т. е. связана с ограниченностью скорости получения данных с измерительных устройств, обработки полученной информации и передачи сигнала на органы управления. В этой связи, практический интерес представляет задача стабилизации механической системы, в которой запаздывание присутствует только в контуре управления. В настоящей работе как раз рассматривается задача асимптотической стабилизации линейной лагранжевой механической системы при наличии запаздывания в контуре управления. Предлагается неавтономная замена переменных, позволяющая исключить запаздывание из контура управления, сохранив в остальном уравнения движения объекта без изменений. Используемая замена переменных является модификацией преобразования, известного как редукция Артстейна [1, 5]. Для стабилизации системы в новых переменных используется энергетический метод. Такой подход позволил найти в общем виде стабилизирующее управление в виде обратной связи. Полученные в работе результаты могут использоваться при разработке алгоритмов управления механическими системами при наличии в замкнутой системе естественного информационного запаздывания.

2. Постановка задачи

Рассматривается механическая система

$$D\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = u(t-h), \qquad q \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

управление которой осуществляется с помощью обобщённых сил $u(t-h)$, а суммарное время, затрачиваемое на получение и обработку информации с измерительных датчиков и формирование управляющего воздействия, составляет h ($h > 0$). В (1) q — матрица-столбец обобщённых координат, u — матрица-столбец обобщённых сил, D — симметрическая положительно определённая матрица, C и K — произвольные квадратные матрицы.

Ставится задача синтеза обратной связи, обеспечивающей асимптотическую устойчивость положению равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1).

3. Редукция запаздывания в контуре управления

Изложим общий метод сведения задачи асимптотической стабилизации для линейной системы с запаздыванием в управлении к задаче асимптотической стабилизации для линейной системы без запаздывания. Запишем уравнения (1) в форме Коши

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-h), \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \Theta & E \\ -D^{-1}K & -D^{-1}C \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \Theta \\ D^{-1} \end{pmatrix}, \qquad x(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix},$$

E и Θ — единичная и нулевая матрицы соответственно.

Используя новые переменные

$$y(t) = x(t) + \int_{t-h}^{t} e^{A(t-s-h)} Bu(s)\, ds,$$

уравнения движения (2) могут быть записаны в виде [4, 5]

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + e^{-Ah} Bu(t), \tag{3}$$

где

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

— матричная экспонента.

В [4] показано, что если положение равновесия системы (3) замкнутой обратной связью $u(t) = Fy(t)$ асимптотически устойчиво, то обратная связь

$$u(t) = Fx(t) + \int_{t-h}^{t} Fe^{A(t-s-h)} Bu(s)\, ds$$

обеспечивает асимптотическую стабилизацию положения равновесия замкнутой системы (2). Отметим, что в результате сделанной замены было исключено запаздывание в контуре управления, но при этом структура матриц коэффициентов при управлении в (2) и (3), вообще говоря, различная, что затрудняет использование энергетического метода для стабилизации (3). Для того, чтобы сохранить структуру матриц коэффициентов выполним следующую замену

$$z(t) = e^{Ah}x(t),$$

имеем

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) = e^{Ah}\dot{y}(t) = e^{Ah}Ay(t) + e^{Ah}e^{-Ah}Bu(t) = \\ = e^{Ah}Ae^{-Ah}z(t) + Bu(t) = Az(t) + Bu(t).\end{aligned}$$

В преобразованиях использовано тождество $e^{Ah}e^{-Ah} = E$, а также то, что матрицы e^{Ah}, A и e^{-Ah} — перестановочные [6]. Таким образом, в переменных z уравнения движения приобрели вид

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t). \tag{4}$$

Учитывая структуру матриц A и B и полагая $z(t) = (r^T(t) \quad \dot{r}^T(t))^T$, теперь уравнения (4) возможно записать в виде

$$D\ddot{r}(t) + C\dot{r}(t) + Kr(t) = u(t). \tag{5}$$

Для стабилизации (5) будет использоваться обратная связь вида

$$u(t) = -K_0r(t) - C_0\dot{r}(t). \tag{6}$$

Повторяя рассуждения из [4], убеждаемся, что если положение равновесия замкнутой системы (5), (6) асимптотически устойчиво, то положение равновесия системы (1), замкнутой обратной связью

$$u(t) = Fe^{Ah}\begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} + \int_{t-h}^{t} Fe^{A(t-s)}Bu(s)\,ds, \tag{7}$$

где $F = -(K_0 \quad C_0)$, также будет асимптотически устойчиво.

4. Стабилизация системы без запаздывания

Условия асимптотической устойчивости для замкнутой системы (5), (6), определяются следующей теоремой.

Теорема. Пусть квадратные матрицы C_0 и K_0 таковы, что для матриц $\tilde{C} = C + C_0$, $\tilde{K} = K + K_0$ выполнены неравенства $\tilde{C} + \tilde{C}^T > 0$, $\tilde{K} + \tilde{K}^T > 0$, $\det \tilde{K} \neq 0$. Тогда положение равновесия $r = \dot{r} = 0$ замкнутой системы (5), (6) асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о представляет собой проверку условий теоремы Барбашина — Красовского [7] для следующей функции Ляпунова:

$$V(r, \dot{r}) = \frac{1}{2}\dot{r}^T D\dot{r} + \frac{1}{2}r^T(\tilde{K} + \tilde{K}^T)r.$$

Функция V определённо положительная вследствие того, что $D > 0$ и $\tilde{K} + \tilde{K}^T > 0$.

Перепишем замкнутую систему (5), (6) в виде

$$D\ddot{r} + \tilde{C}\dot{r} + \tilde{K}r = 0. \tag{8}$$

и вычислим производную функции Ляпунова в силу уравнений (8)

$$\begin{aligned}\dot{V}(r, \dot{r}) &= \frac{1}{2}\ddot{r}^T D\dot{r} + \frac{1}{2}\dot{r}^T D\ddot{r} + \frac{1}{2}\dot{r}^T(\tilde{K} + \tilde{K}^T)r + \frac{1}{2}r^T(\tilde{K} + \tilde{K}^T)\dot{r} = \\ &= \frac{1}{2}(-\tilde{C}\dot{r} - \tilde{K}r)^T\dot{r} + \frac{1}{2}\dot{r}^T(-\tilde{C}\dot{r} - \tilde{K}r) + \dot{r}^T(\tilde{K} + \tilde{K}^T)r = \\ &= -\dot{r}^T(\tilde{C} + \tilde{C}^T)\dot{r} \leqslant 0.\end{aligned}$$

Осталось показать, что множество $S = \{(r,\ \dot{r}) \mid \dot{V}(r, \dot{r}) = 0\}$ не содержит иных траекторий, кроме $r(t) \equiv \dot{r}(t) \equiv 0$. Из того, что $\dot{V}(r, \dot{r}) = 0$, имеем $\dot{r}(t) \equiv 0$ и, следовательно, $\ddot{r}(t) \equiv 0$. Поэтому из (8) получаем $\tilde{K}r(t) \equiv 0$, а учитывая условие $\det \tilde{K} \neq 0$, заключаем, что $r(t) \equiv 0$. Что и требовалось. Доказательство завершено.

5. Случай инерционного движения

Вычисление матрицы e^{At} для больших систем обычно является трудной задачей, однако в некоторых случаях такое вычисление достаточно просто.

Так, часто на механическую систему не действует иных внешних сил, кроме управляющих, т. е. $C = K = \Theta$ в (1). Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \Theta & E \\ \Theta & \Theta \end{pmatrix}, \qquad e^{At} = \begin{pmatrix} E & Et \\ \Theta & E \end{pmatrix},$$

а стабилизирующая обратная связь может быть найдена по (7) в явном виде

$$u(t) = -K_0 q(t) - (C_0 + hK_0)\dot{q}(t) - \int_{t-h}^{t} (C_0 + (t-s)K_0) D^{-1} u(s)\, ds,$$

где для матриц C_0 и K_0 условия теоремы предполагаются выполненными.

6. Пример

Рассмотрим задачу стабилизации для механической системы с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$\ddot{q}(t) - \dot{q}(t) - 2q(t) = u(t-1). \tag{9}$$

В этом примере $D = 1$, $C = -1$, $K = -2$, $h = 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выберем $C_0 = 5$, $K_0 = 5$. Тогда $\tilde{C} = C + C_0 = 4 > 0$, $\tilde{K} = K + K_0 = 3 > 0$. Учитывая, что

$$e^{At} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} & 2e^{2t} + e^{-t} \end{pmatrix},$$

находим по (7) стабилизирующую обратную связь

$$u(t) = -5e^2 q(t) - 5e^2 \dot{q}(t) - 5 \int_{t-h}^{t} e^{2(t-s)} u(s)\, ds. \tag{10}$$

На рис. 1 представлен график переходного процесса в замкнутой системе (9), (10). Сплошной линией показан график $q(t)$, прерывистой — график $u(t-h)$. В качестве начальных условий приняты $q(t) = 1$, $\dot{q}(t) = u(t) = 0$ при $t \leqslant 0$. Большое уклонение $q(t)$ от положения равновесия во время переходного процесса можно объяснить отсутствием управляющего воздействия $u(t-1)$ при $t \leqslant 1$.

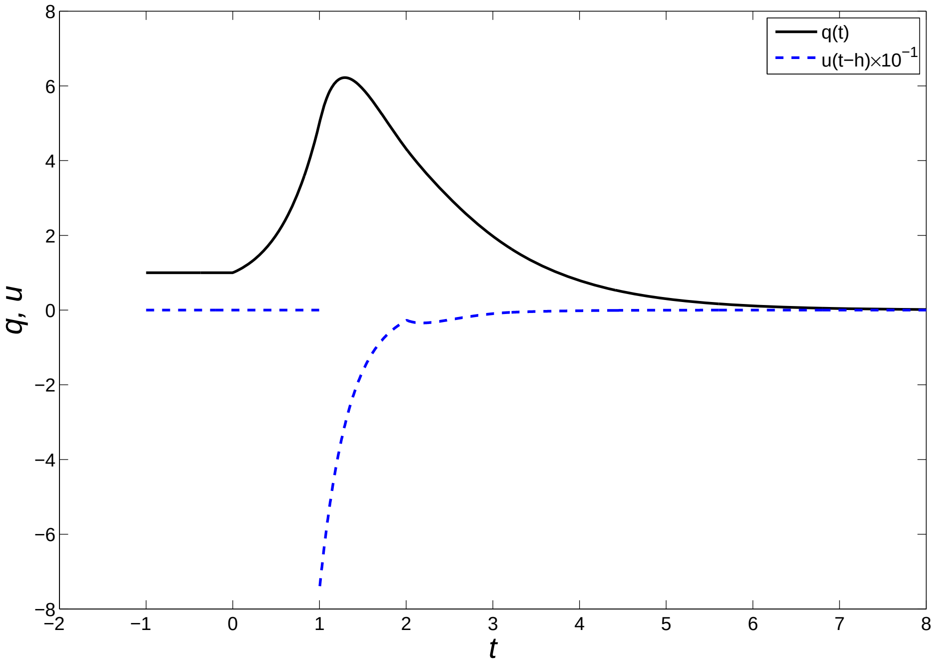

Рис. 1. Переходный процесс в замкнутой системе (9), (10)

7. Заключение

Рассмотрена задача асимптотической стабилизации положения равновесия лагранжевой системы при наличии запаздывания в контуре управления. Для линейной лагранжевой системы общего вида найдена динамическая обратная связь, обеспечивающая решение поставленной задачи. Предлагаемый подход основан на преобразовании модели, исключающей запаздывание из контура управления, сохраняя в остальном уравнения движения объекта без изменений. Эффективность предлагаемого метода управления подтверждена результатами вычислительного эксперимента. Полученные в работе результаты могут использоваться при разработке алгоритмов управления механическими системами при наличии в замкнутой системе естественного информационного запаздывания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-07-00468 и № 10-07-00327), Программы Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (грант No НШ-4144.2010.1).

Список литературы

1. *Richard J.P.* Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. V. 39. P. 1667–1694.
2. *Колмановский В.Б.*, *Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.
3. *Пятницкий Е.С.* Избранные труды. Т. 3. М.: Физматлит, 2006. 448 с.
4. *Kwon H.W.*, *Pearson A.E.* Feedback stabilization of linear systems with delayed control // IEEE Trans. Automat. Control. 1980. V. 25. № 2. P. 266–269.
5. *Artstein Z.* Linear systems with delayed controls: A reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1982. V. 27. No 4. P. 869–879.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. 576 с.
7. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 226 с.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
El № FS77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Asymptotic stabilization of linear Lagrange's systems with delayed controls

77-30569/236859

10, October 2011

Gorbunov A.V.

Bauman Moscow State Technical University
mathmod@bmstu.ru

The problem of a Lagrange's system equilibrium point asymptotic stabilization with delay in the control loop is considered. For a general case of linear Lagrangian systems the dynamic feedback providing the solution of a task in view is found. The offered approach is based on the use of change of variables excluding delay from the control loop, keeping the plant equations of motion without changes. The considered change of variables represents the modified transformation known as an Artstein reduction. The energy method is applied to solve the stabilization problem for the system in the new variables. Efficiency of the offered control method is shown trough numerical simulations. The results received in this note can be used to design control algorithms for mechanical systems under conditions of the limited speed of reception, processing and transfer of an operating signal.

References

1. *Richard J.P.* Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. V. 39. P. 1667–1694.
2. Kolmanovskijj V.B., Nosov V.R. Ustojjchivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledejjstviem. M.: Nauka, 1981. 448 s.
3. Pjatnickijj E.S. Izbrannye trudy. T. 3. M.: Fizmatlit, 2006. 448 s.
4. *Kwon H.W.*, *Pearson A.E.* Feedback stabilization of linear systems with delayed control // IEEE Trans. Automat. Control. 1980. V. 25. № 2. P. 266–269.
5. *Artstein Z.* Linear systems with delayed controls: A reduction // IEEE Trans. Automat. Control. 1982. V. 27. No 4. P. 869–879.
6. Gantmakher F.R. Teorija matric. M.: Nauka, 1966. 576 s.
7. Barbashin E.A. Vvedenie v teoriju ustojjchivosti. M.: Nauka, 1967. 226 s.